

Optimización multiobjetivo para resolver el problema de ruteo sin retorno al depósito de inicio
(OVRP)

Lisbeth Carolina Pava García



Universidad
Tecnológica
de Pereira

Universidad Tecnológica de Pereira
Facultad de Ingeniería Industrial
Maestría en Investigación Operativa y Estadística
Pereira - Risaralda
Octubre de 2019

AGRADECIMIENTOS

A Dios que me ha permitido llegar hasta este momento y me ha guiado mi camino.

A mis padres Luz Dary y Eleuterio que me han apoyado siempre y me han convertido en la mujer que soy.

A Diego Naranjo mi compañero de vida quien creyó en mis capacidades para culminar exitosamente este proceso y me impulso en el momento adecuado.

A mi orientadora Eliana Toro por aceptar, acompañar el reto y tener la paciencia para sacar este proyecto adelante.

A la UTP por haberme dado la Beca que me permitió continuar con mis estudios

DEDICATORIA

Al ser perfecto y hermoso que se está formando dentro de mí y que se ha convertido en mi gran impulso y a mi esposo que de forma inalcanzable me anima día a día ser mejor, me acompaña y reconforta.

GLOSARIO

ACO: *Ant Colony Optimization*

BBMOOVRP: *A Bumble Bees Mating Optimization algorithm for the Open Vehicle Routing Problem*

COVRTW: *Capacity Open Vehicle Routing Problem with time windows constraints*

CVRP-HF: *Capacity Vehicle Routing Problem with heterogeneous fleet*

DCVRP: *Capacitated vehicle routing problem with distance constraints*

ENS: *Neighborhood Search*

EVRPTW: *Environment vehicle Routing Problem with time windows constraints*

FCVRP: *Fuel Consumption vehicle routing problem*

GRASP: *Greedy randomized adaptive search procedures*

OROTR: *Record-to-record travel*

OVRPRB: *Open vehicle routing problems with load balancing*

OVRP: *Open vehicle routing problem*

PRP: *Routing Problem*

RVTE: *Ruteo de Vehículos para el Transporte Escolar*

SA: *Simulated annealing*

SALRP: *Simulated annealing heuristic for the capacitated location routing problem*

SMD: *Statically encoded into static move descriptor*

TSPTW: *The Traveling Salesman Problem with Time Windows*

VRP: *Vehicle Routing Problem*

VRPRB : *Vehicle routing problems with load balancing*

VRPBTW: *Vehicle routing problems with load balancing with Time Windows*

INFORMACIÓN GENERAL

Titulo: Optimización multi-objetivo para resolver el problema de ruteo sin retorno al depósito de inicio (OVRP)

Área de investigación: Este proyecto se despliega en el entorno de la investigación de operaciones, las meta heurísticas, y modelamiento algebraico haciendo énfasis en el modelamiento matemático, en búsqueda de encontrar el mejor modelo presente en la literatura. Para lograr esto, el proyecto involucra las siguientes áreas: • Investigación de operaciones. • Lenguaje de programación. • Optimización combinatorial

Materias asociadas a la investigación: Las temáticas que servirán como herramientas de apoyo para la investigación del proyecto son las siguientes: Programación matemática , Meta heurísticas.

Director: Eliana Miredy Toro Ocampo. Ing. Industrial, Magíster en Ingeniería Eléctrica en la línea de Investigación operativa y Magíster en Investigación de Operaciones y Estadística, y Ph.D. en Ingeniería. Profesora Titular, Facultad de ingeniería industrial. Universidad Tecnológica de Pereira. E-mail: elianam@utp.edu.co.

RESUMEN

La Planificación de ruta es una de las decisiones operacionales de las empresas de logística, transporte y distribución que tienen un alto impacto en la eficiencia y la calidad de los servicios. Hoy en día estos problemas tienen mayor importancia, y no sólo por razones económicas. La posibilidad de obtener soluciones de alta calidad tan pronto como sea posible con independencia de los operadores humanos no puede ser ignorada. La interacción humana puede fallar, retrasar respuestas o provocar errores irreversibles. Por lo tanto, la disponibilidad de sistemas inteligentes que implementan efectivamente modelos operativos y soluciones adecuadas es una prioridad. Sin embargo, en profundidad se requiere el conocimiento de los modelos en los que han de basarse para tales sistemas.

En el problema de ruteo de vehículos abiertos, *Open Vehicle Routing Problem* (OVRP), un vehículo no vuelve al depósito después de dar servicio al último cliente en una ruta. La descripción de esta variante del problema de rutas para vehículos estándar apareció en la literatura de hace más de 20 años, pero solo recientemente atrajo la atención de los profesionales e investigadores.

En este trabajo se propone realizar una revisión del estado del arte, modelos y técnicas de solución usadas por diferentes autores para resolver el OVRP. Debido a que muchas empresas en sus etapas iniciales no tienen una flota de vehículos propios para realizar su distribución, o porque la flota actual de vehículos puede sufrir algún percance que la saque de operación, o para realizar la comparación entre la opción de tener flota propia o flota subcontratada para desarrollar su operación, este tipo de modelo es usado frecuentemente por empresas de paquetería, periódicos, rutas escolares en donde en la mañana se parte de sitios diferentes al colegio o en la tarde no se retorna a la institución.

Se considera un modelo OVRP con las siguientes delimitaciones del problema:

1. Se cuenta con un único depósito, de donde salen los vehículos pero no deberán volver.
2. La capacidad del depósito es infinita o suficiente para atender la demanda del problema.
3. Todos los vehículos tienen una capacidad de carga limitada y uniforme

4. El conjunto de clientes i tienen una demanda conocida.

6. Cada cliente será visitado una única vez con cualquiera de los vehículos.

Se consideraron el total tres funciones objetivo : minimización de costos, minimización de emisiones donde se considera una tasa de consumo de combustible que está fuertemente relacionada con el peso neto del vehículo, obtenido como la sumatoria entre el peso del vehículo vacío y el peso de la carga del vehículo, y minimización de longitud de ruta máxima o *Vehicle Routing Problems with Load Balancing* (VRPR) tratadas por pares con enfoque multi-objetivo el cual es totalmente apropiado, ya que el equilibrio entre los aspectos económicos, emisiones y longitud de ruta se puede seleccionar desde el frente de Pareto utilizando un proceso de toma de decisiones.

Para su solución se aplicó el método *Epsilon Constraint*. El modelo matemático propuesto es totalmente flexible y permite resolver tanto las versiones mono-objetivo como las multi-objetivo. Los resultados obtenidos en ambas versiones, son competitivos con las desarrolladas por otros autores que usan para su solución métodos exactos, heurísticas y metaheurísticas, al realizar comparaciones en casos de la literatura especializada.

ABSTRACT

Route planning is one of the operational decisions of logistics, transportation and distribution companies that have a high impact on the efficiency and quality of services. Nowadays these problems are more important, and not only for economic reasons. The possibility of obtaining high quality solutions as soon as possible regardless of human operators can not be ignored. Human interaction can fail, delay responses or cause irrecoverable errors. Therefore, the availability of intelligent systems that effectively implement operational models and appropriate solutions is a priority. However, in-depth knowledge of the models on which they are based is required for such systems.

In the problem of *open vehicle routing problem* (OVRP), a vehicle does not return to the warehouse after serving the last customer on a route. The description of this variant of the problem of routes for standard vehicles appeared in the literature more than 20 years ago, but only recently attracted the attention of professionals and researchers.

In this paper, we propose a review of the state of the art, models and solution techniques used by different authors to solve the OVRP. Because many companies in their initial stages do not have a fleet of vehicles to distribute, or because the current fleet of vehicles may suffer a mishap that took it out of operation, or to make the comparison between the option of own fleet or outsourced fleet to develop its operation, this type of model is frequently used by parcel companies, newspapers, school routes where in the morning part of different sites to the school or in the afternoon does not return to the institution.

It is considered an OVRP model with the following delimitations of the problem:

1. There is a single deposit, where vehicles leave but they should not return.
2. The capacity of the deposit is infinite or enough to meet the demand of the problem.
3. All vehicles have a limited and uniform load capacity
4. The set of i clients have a known demand.
6. Each customer will be visited once with any of the vehicles.

The total three functions were considered: minimization of costs, minimization of emissions where a fuel consumption rate is considered that is strongly related to the net weight of the vehicle, obtained as the sum between the weight of the empty vehicle and the weight of the vehicle. vehicle load, minimization of maximum route length or vehicle routing problems with load balancing or VRPRB, brought with multi-objective approach which is totally appropriate, since the balance between economic aspects, emissions and route length can be selected from the Pareto front using a decision-making process.

For its solution, the Epsilon constraint method was applied. The proposed mathematical model is completely Wexible and allows to solve both mono-objective and multi-objective versions. The results obtained in both versions are competitive with the developments by other authors who use exact, heuristic and metaheuristic methods for their solution, when making comparisons in cases of specialized literature.

INDICE FIGURAS

<i>Figura 2.1: Variantes del problema de ruteo. Fuente el autor.</i>	<i>25</i>
<i>Figura 2.2: Grafo VRP. Fuente el autor.....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 2.3: Grafo OVRP. Fuente el autor.....</i>	<i>28</i>
<i>Figura 2.4: Estrategias de solución de optimización combinatoria.....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 2.5: Fuerzas actuando sobre el vehículo.</i>	<i>41</i>
<i>Figura 2.6 Representación geométrica del método ε-constraint.....</i>	<i>65</i>
<i>Figura 3.1: Red de arcos.Fuente el autor.....</i>	<i>70</i>
<i>Figura 3.2: Problema ejemplo OVRP. Fuente el autor.....</i>	<i>73</i>
<i>Figura 3.3: Funcionamiento restricciones tipo 1. Fuente el autor.</i>	<i>76</i>
<i>Figura 3.4: funcionamiento restricciones tipo 2. Fuente el autor.....</i>	<i>77</i>
<i>Figura 3.5 : Funcionamiento restricciones tipo 4. Fuente el autor.</i>	<i>79</i>
<i>Figura 3.6: Ejemplo. Fuente el autor.</i>	<i>84</i>
<i>Figura 3.7: Resultados análisis de sensibilidad. Fuente el autor.</i>	<i>87</i>
<i>Figura 4 2: Frente de Pareto instancia A33-5 con efectos ambientales. Fuente el autor.</i>	<i>96</i>
<i>Figura 4. 3: Frente de Pareto.....</i>	<i>97</i>
<i>Figura 4 4: Frontera Pareto-optima</i>	<i>98</i>
<i>Figura 4.5: Frente de Pareto instancia A33-K5.....</i>	<i>102</i>
<i>Figura 4.6: Frente de Pareto instancia A34-K5.....</i>	<i>103</i>
<i>Figura 4.7: Frente de Pareto instancia P16-K8.....</i>	<i>104</i>
<i>Figura 4.8: Frente de Pareto instancia P19-K2.....</i>	<i>105</i>
<i>Figura 4.9: Frente de Pareto instancia P23-K8.....</i>	<i>106</i>
<i>Figura 4.10: Frente de Pareto instancia P40-K5.....</i>	<i>107</i>
<i>Figura 4.11: Frente de Pareto instancia P45-K5.....</i>	<i>108</i>
<i>Figura 4.12:Frente de Pareto instancia P50-K7.....</i>	<i>109</i>
<i>Figura 4.13: Frente de Pareto instancia P55-K10.....</i>	<i>110</i>
<i>Figura 4.14: Frente de Pareto instancia P60-K10.....</i>	<i>111</i>
<i>Figura 4.15 Frente de Pareto instancia P76-K5.....</i>	<i>112</i>
<i>Figura 4.16 Frente de Pareto instancia P101-K4.....</i>	<i>113</i>

<i>Figura 4.17: Frente de Pareto instancia E22-K4.....</i>	<i>114</i>
<i>Figura 4.18: Frente de Pareto instancia E23-K3.....</i>	<i>115</i>
<i>Figura 4.19:Frente de Pareto instancia E30-K3.....</i>	<i>116</i>
<i>Figura 4.20: Frente de Pareto instancia E33-K4.....</i>	<i>117</i>
<i>Figura 4.21 : Grafo instancia P-n45-k5, minimizando costo.....</i>	<i>118</i>
<i>Figura 4.22:Grafo instancia P-n45-k5, minimizando hmax.....</i>	<i>118</i>

INDICE DE TABLAS

<i>Tabla 2.1: Revisión de artículos parte 1</i>	31
<i>Tabla 2.2: Revisión de artículos parte 2</i>	32
<i>Tabla 2.3: Revisión de artículos parte 3</i>	33
<i>Tabla 2.4: Revisión de artículos parte 4</i>	34
<i>Tabla 2.5: Revisión de artículos parte 5</i>	35
<i>Tabla 2.6: Revisión de artículos parte 6</i>	36
<i>Tabla 2.7: Revisión de artículos parte 7</i>	37
<i>Tabla 2.8: Comparación de modelos matemáticos del problema de ruteamiento de vehículos considerando efectos ambientales parte 1</i>	53
<i>Tabla 2.9: Comparación de modelos matemáticos del problema de ruteamiento de vehículos considerando efectos ambientales parte 2</i>	54
<i>Tabla 2.10: Comparación de modelos matemáticos del problema de ruteamiento de vehículos considerando efectos ambientales parte 3</i>	55
<i>Tabla 2.11: Comparación de modelos matemáticos del problema de ruteamiento de vehículos considerando efectos ambientales parte 4</i>	57
<i>Tabla 2.12: Comparación de modelos matemáticos del problema de ruteamiento de vehículos considerando efectos ambientales parte 5</i>	58
<i>Tabla 3.1: Demandas</i>	73
<i>Tabla 3.2: Matriz de distancias euclidiana</i>	75
<i>Tabla 3.3: Ejemplo costo de combustible</i>	83
<i>Tabla 3.4: Distancias entre nodos</i>	84
<i>Tabla 3.5: Resultados obtenidos</i>	85
<i>Tabla 4 1: Resultados instancia A32-5 con efectos ambientales</i>	94
<i>Tabla 4. 2: Resultados instancia A33-5 con efectos ambientales</i>	95
<i>Tabla 4. 3: Comparación de resultados con la literatura</i>	100
<i>Tabla 4.4. Resumen resultados del modelo</i>	100
<i>Tabla 4 6: Resultados frente de Pareto instancia A34-K5</i>	103
<i>Tabla 4.7: Resultados frente de Pareto instancia P16-K8</i>	104

<i>Tabla 4.8: Resultados frente de Pareto instancia P19-K2</i>	<i>105</i>
<i>Tabla 4.9: Resultados frente de Pareto instancia P23-K8</i>	<i>106</i>
<i>Tabla 4..10: Resultados frente de Pareto instancia P40-K5</i>	<i>107</i>
<i>Tabla 4..11: Resultados frente de Pareto instancia P45-K5</i>	<i>108</i>
<i>Tabla 4..12: Resultados frente de Pareto instancia P50-K7</i>	<i>109</i>
<i>Tabla 4.13: Resultados frente de Pareto instancia P55-K10</i>	<i>110</i>
<i>Tabla 4.14: Resultados frente de Pareto instancia P60-K10</i>	<i>111</i>
<i>Tabla 4.15: Resultados frente de Pareto instancia P76-K5</i>	<i>112</i>
<i>Tabla 4.16: Resultados frente de Pareto instancia P101-K4</i>	<i>113</i>
<i>Tabla 4.17: Resultados frente de Pareto instancia E22-K4</i>	<i>114</i>
<i>Tabla 4.18: Resultados frente de Pareto instancia E23-K3</i>	<i>115</i>
<i>Tabla 4..19:Resultados frente de Pareto instancia E30-K3</i>	<i>116</i>
<i>Tabla 4.20:Resultados frente de Pareto instancia E33-K4</i>	<i>117</i>

INDICE GENERAL

1	CAPÍTULO 1	16
1.1	INTRODUCCIÓN	16
1.2	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	18
1.3	JUSTIFICACIÓN	19
1.4	OBJETIVOS	20
1.1.1	OBJETIVO GENERAL	20
1.4.1	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	20
2	CAPÍTULO 2	22
2.1	ANTECEDENTES	22
2.2	PLANEACIÓN DE RUTAS.	26
2.3	PROBLEMA DE RUTEO DE VEHICULOS ABIERTO (OVRP)	27
2.4	ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN	30
2.5	CLASIFICACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN PARA RESOLVER LOS OVRPS	37
2.6	ENRUTAMIENTO ÓPTIMO DE VEHÍCULOS CONSIDERANDO EFECTOS AMBIENTALES	40
2.6.1	CÁLCULO DEL CONSUMO DE COMBUSTIBLE (ELIANA M. TORO, 2017)	40
2.6.2	ENRUTAMIENTO ÓPTIMO DE VEHÍCULOS CONSIDERANDO EFECTOS AMBIENTALES	44
2.7	BALANCEO DE RUTAS - <i>VEHICLE ROUTING PROBLEMS WITH LOAD BALANCING O VRPRB</i>	59
2.7.1	BALANCE DE CARGA EN EL PROBLEMA DE RUTEO (GERALDINE, 2019)	63
2.8	<i>EPSILON-CONSTRAINT METHOD</i> (RAMON, ELIANA, & ANTONIO, 2015)	64

2.9	OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO	66
3	CAPÍTULO 3	69
3.1	MODELO OVRP	69
3.1.1	EXPLICACIÓN DE MODELO MATEMÁTICO OVRP	69
3.1.2	CONSTRUCCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO	69
3.1.3	MODELADO MATEMÁTICO (OCAMPO, 2016)	71
3.2	FUNCIÓN OBJETIVO ALTERNATIVA “MINIMIZAR CONSUMO DE COMBUSTIBLE”	80
3.2.1	ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD	85
4.2.3	PARÁMETROS DEL MODELO	87
3.3	FUNCION OBJETIVO ALTERNATIVA: BALANCEO DE RUTAS	88
3.3.1	MODELAMIENTO MATEMÁTICO.	89
5.	CAPÍTULO 4	94
4.1	RESULTADOS OBTENIDOS	94
4.1.1	RESULTADOS MODELO MULTIOBJETIVO COSTO-EFECTOS AMBIENTALES	94
4.1.2	RESULTADOS MODELO MULTIOBJETIVO COSTO – BALANCEO DE RUTA	99
4.1.3	CONSTRUCCION DE FRENTES DE PATERO	101
5	CAPÍTULO 5	120
5.1	CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	120
5.1.1	CONCLUSIONES	120
5.1.2	TRABAJOS FUTUROS	122
6	BIBLIOGRAFÍA	123

1.1 INTRODUCCIÓN

La subcontratación es una práctica comercial corriente que ofrece eficiencia y calidad en los servicios y operaciones. Las actividades que no están directamente incluidas en los objetivos estratégicos de negocio pueden ser subcontratadas porque no producen valor añadido o el ahorro de costes. Esta situación se produce en la logística y las actividades de transporte, donde muchas empresas optan por la colaboración y la contratación de empresas especializadas para llevar a cabo estas actividades. Por lo tanto, las empresas con sus propios recursos contratan los servicios de otras empresas, con recursos complementarios, para satisfacer las necesidades ocasionales o para cumplir parte de su estrategia de negocio (Brito, Martínez, Moreno, & Verdegay, 2015).

La Planificación de ruta es una de las decisiones operacionales de las empresas de logística, transporte y distribución que tienen un alto impacto en la eficiencia y la calidad de los servicios. Hoy en día estos problemas tienen mayor importancia, y no sólo por razones económicas. La posibilidad de obtener soluciones de alta calidad tan pronto como sea posible con independencia de los operadores humanos no puede ser ignorada. La interacción humana puede fallar, retrasar respuestas o provocar errores irreversibles. Por lo tanto, la disponibilidad de sistemas inteligentes que implementan efectivamente modelos operativos y soluciones adecuadas es una prioridad. Sin embargo, en profundidad se requiere el conocimiento de los modelos en los que han de basarse para tales sistemas.

En la versión estándar del problema de rutas para vehículos (VRP), se genera una secuencia de entregas para cada vehículo en una flota homogénea basada en un solo depósito para que todos los clientes sean atendidos y la distancia total recorrida por la flota se minimice. Cada vehículo tiene una capacidad fija y tal vez una restricción de longitud de ruta que limita el máximo la

distancia que puede recorrer. Cada cliente tiene una demanda conocida y es atendida por exactamente una visita de un solo vehículo, cada vehículo debe salir y regresar al depósito.

En el problema de ruteo de vehículos abiertos, *open vehicle routing problem* (OVRP), un vehículo no vuelve al depósito después de dar servicio al último cliente en una ruta. La descripción de esta variante del problema de rutas para vehículos estándar aparecido en la literatura de hace más de 20 años, pero solo recientemente atrajo la atención de los profesionales e investigadores.

La mayor parte de la literatura existente se dedica a OVRP. La primera OVRP de mencionar es en un artículo de Schrage (L., 1981) en 1981, donde una distinción explícita se hace entre viajes cerrados y viajes abiertos asignados a los vehículos de transporte comunes.

Bodin et al. (Bodin, Golden, Assad, & M. Ball, 1983) Propuso la primera aproximación solución para el OVRP. *Open Vehicle Routing Problem with Time Window* (OVRPTW) se abordó primero como un todo por Repoussis et al. (Brandao, A tabu search heuristic algorithm for open vehicle routing problem, 2004). Estos problemas son NP-duros (Repoussis, Tarantilis, & Ioannou, The open vehicle routing problem, 2007), que los hace intratables con grandes instancias, como es habitual en aplicaciones reales, y de ahí la necesidad de la utilización de heurísticas y meta heurísticas proporcionar métodos posibles para encontrar soluciones óptimas. Desde el año 2000, algunos investigadores desarrollaron métodos para resolver el OVRP (véase, por ejemplo, Repoussis, Tarantilis, Bräysy, y Ioannou, 2010; Salari, Toth, y Tramontani, 2010; Zachariadis y Kiranoudis de 2010 que son algunos de los más recientes).

En los últimos años, algunos investigadores han utilizado varias meta-heurísticas para resolver el OVRP con éxito. Las meta heurísticas más comunes se basan en búsqueda tabú (Bodin, Golden, Assad, & M. Ball, 1983) (Derigs & Reuter, 2009) (Fu, Eglese, & L. Li, A new tabu search heuristic for the open vehicle routing, 2005) (Fu, Eglese, & Li, 2006) (Huang & Liu, 2010) (Russell, Chiang, & Zepeda, 2008), búsqueda en vecindario variable (Fleszar, Osman, & Hindi, 2009) (Pisinger & Ropke, 2007) (Salari, Toth, & Tramontani, 2010) (Zachariadis & Kiranoudis, 2010), o algoritmo de umbral de aceptación (Tarantilis C. , Ioannou, Kiranoudis, & Prastacos, 2004) (Tarantilis, Ioannou, & Kiranoudis, 2005). Otros investigadores han aplicado meta

heurísticas bioinspiradas y poblaciones basadas en optimización por enjambre de partículas (Ge, Zhen, Jiang, & Che, 2010) (Hassani & Abolghasemi, 2011) (Wang, Wu, Zhao, & Feng, 2006) (Zhen, Zhu, & Zhang, 2009), optimización de colonia de hormigas (Li & Tian, An ant colony system for the open vehicle routing problem, 2006) (Li, Tian, & Leung, An ant colony optimization metaheuristic hybridized, 2009) o la información genética y evolutiva (Pan & Fu, 2009) (Repoussis P. , Tarantilis, Braysy, & Ioannou, 2010) (Yu, Ding, & Zhu, 2011).

En este trabajo se propone realizar una revisión del estado del arte, modelos y técnicas de solución usadas por diferentes autores para resolver el OVRP, además propone un modelamiento multiobjetivo en donde se pretende estudiar el rendimiento del problema mediante la construcción de diferentes funciones objetivo (costos, emisiones y longitud de ruta). Esto es importante debido a que muchas empresas en sus etapas iniciales no tienen una flota de vehículos propios para realizar su distribución, o porque la flota actual de vehículos puede sufrir algún percance que la saque de operación, o para realizar la comparación entre la opción de tener flota propia o flota subcontratada para desarrollar su operación, este tipo de modelo es usado frecuente por empresas de paquetería, periódicos, rutas escolares en donde en la mañana se parte de sitios diferentes al colegio o en la tarde no se retorna a la institución.

El documento tiene la siguiente estructura:

En el Capítulo 2 se realiza la revisión del estado del arte, mostrando los conceptos y estudios de los temas concernientes a este trabajo; los cuales fueron necesarios para realizar una correcta indagación. En el capítulo 3 se explican los modelos usados de forma detallada así como sus variables y parámetros. En el Capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos y su análisis. Finalizando con el Capítulo 5 donde se encuentran las conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema de ruteo de vehículos permite a las empresas optimizar costos referentes a transportes, siendo necesario modelar las nuevas necesidades de transporte en las que las

empresas subcontratan estos servicios. En este trabajo se pretende realizar una revisión del estado del arte, modelos y técnicas de solución usadas por diferentes autores para el OVRP que permitan obtener información rápida y precisa para futuras investigaciones, además de resolver un modelo con varias funciones objetivo que serán determinadas durante la elaboración del proyecto mediante la técnica *Epsilon Constraint*.

1.3 JUSTIFICACIÓN

Hoy en día, el OVRP se encuentra en la práctica de la entrega a domicilio de paquetes y periódicos. Los contratistas que no son empleados de la empresa de entrega y utilizar sus propios vehículos no vuelven al depósito. Este problema puede tener como objetivo encontrar el número mínimo de vehículos que se requieren para dar servicio a todos los clientes.

Una de las primeras descripciones del OVRP fue dada por Schrage (L., 1981) en un artículo que intentó clasificar las características clave "Un vehículo se puede caracterizar al menos por las siguientes tres características: su (multidimensional) capacidad, costo, y si hace viajes abiertos o cerrados".

En Bodin y otros (Bodin, Golden, Assad, & M. Ball, 1983) describe que FedEx experimenta el OVRP en su servicio de entrega a domicilio a los clientes residenciales (L, 2005) FedEx lleva los correos y paquetes con los vehículos que conducen al depósito de FedEx cada mañana, y luego de hacer las entregas a residencias los vehículos no vuelven al depósito. El OVRP también se encuentra en el problema de la entrega a domicilio de periódicos (L, 2005). Un portador es subcontratado por la empresa para hacer las entregas a los hogares.

Un tema común cuando un problema de enrutamiento se ajusta al marco OVRP es el modelo de compensación. En el modelado y la solución de problemas del mundo real de enrutamiento de vehículos, (L, 2005) ha observado que, si una empresa no está pagando después de la última entrega, entonces se quiere una ruta eficiente, que no requiera volver al depósito. A menudo, esto se encuentra en la práctica cuando las entregas se hacen por los contratistas que no son empleados de la empresa. Los contratistas tienen sus vehículos propios y pagan sus propios

gastos de vehículos, y pueden tener un modelo de compensación basado en el kilometraje. La empresa no necesita el contratista o el vehículo en el depósito. De hecho, si el modelo de compensación incluye kilometraje, la empresa quiere un camino que no esté influenciada por regresar a la estación porque eso sería añadir el kilometraje extra al modelo de compensación.

Este proyecto busca generar una visión más amplia y detallada de los avances existentes hasta el momento sobre el modelo especial de transporte en el que las rutas no deben volver al lugar de inicio o depósito, además de una formulación matemática para su posterior solución mediante técnicas de solución exacta que llevarían a comparar la eficiencia y comportamiento de los modelos presentes en la literatura.

Este esquema metodológico, permitirá resolver problemas de pequeña escala con el fin de convertirse en un referente para diferentes autores y una manera de validar metodologías de solución desarrolladas. Este trabajo también servirá de guía para conocer los modelos matemáticos y aportes de diferentes autores.

1.4 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo general

Proponer un modelo matemático multiobjetivo para resolver el problema de ruteo sin retorno al depósito de inicio (OVRP) y solucionarlo mediante la técnica *Epsilon Constraint*.

1.4.1 Objetivos específicos

- Revisar el estado del arte del problema de ruteo de vehículos abierto (OVRP), modelos matemáticos propuestos.
- Determinar y documentar las variantes del problema de ruteo de vehículos abierto (OVRP).
- Revisar el estado del arte e identificación de las técnicas de solución usadas para resolver el problema de ruteo de vehículos abierto
- Definir los parámetros de los modelos estudiados sobre ruteo de vehículos abierto (OVRP).

- Identificar y definir para el OVRP las funciones objetivo a optimizar.
- Solucionar el OVRP considerando dos funciones objetivos mediante la técnica *Epsilon Constraint*.
- Implementar los modelos matemáticos en lenguaje algebraico AMPL con un solucionador comercial libre, comparar su eficiencia con el fin de dar solución a pequeñas instancias que permita a otros autores validar sus propuestas metodológicas aproximadas con el fin de verificar la calidad de sus soluciones.

2.1 ANTECEDENTES

En la vida cotidiana existe la necesidad de transportar personas u objetos de un lugar a otro. Dentro de los procesos requeridos para suplir esta necesidad se encuentra el de definir las rutas que deben realizar los vehículos. Las decisiones tomadas en la definición de las rutas pueden implicar un gran ahorro o desperdicio de recursos en la labor del transporte, por lo cual, este proceso tiene una gran relevancia en la cadena de abastecimiento (H & Frazelle, 2001) . (Tan, Chew, & Lee, A hybrid multi-objective evolutionary algorithm for solving truck and trailer vehicle routing problems, 2006).

Algunas de las situaciones de la vida cotidiana en las que se requiere planear y programar el ruteo de vehículos son las siguientes: empresas productoras, empresas de transporte de bienes, mensajería, transporte de desechos, empresas de transporte de personas, transporte escolar, empresas de transporte de valores, etc.

El VRP representa de cierta manera la mayoría de los problemas de la vida cotidiana concernientes con el ruteo de vehículos y es aplicable a cualquier sistema en donde se requieran trasladar objetos de ciertos lugares a otros y se presente una estructura que consista en una flota de vehículos que deben visitar determinados clientes partiendo de uno o varios depósitos dados (Tan, Chew, & Lee, 2006) (Tarantilis, Ioannou, & Prastacos, 2005) (Barbarosoglu & Ozgur, 1999). El VRP tiene muchas variaciones que pueden darse debido a ciertas características tales como: número de vehículos y las propiedades de cada uno de estos, manejo de ventanas de tiempo, lo cual consiste en fijar un lapso de tiempo para que cada cliente pueda ser atendido, también se encuentra el manejo de componentes estocásticos y dinámicos, el hecho de que los vehículos estén obligados o no a retornar al depósito, la existencia de múltiples depósitos, entre

otros (Montemanni, Gambardella, Rizzoli, & Donati, 2005) (Lau, Sim, & Teo, 2003) (Tavakkoli, Safaei, & Gholipour, 2006).

Un caso especial del VRP es el Problema del Agente Viajero, *Travelling Salesman Problem* (TSP), por sus siglas en ingles de *Traveling Salesman Problem*. El TSP y el VRP ya están bien establecidos como problemas combinatorios, y son unos de los problemas más comunes en este tipo de optimización. En esta clase de problemas, para llegar a una solución óptima hay que revisar todas las posibles soluciones para así escoger la mejor, o bien sea aplicar técnicas de programación lineal entera tales como: *Branch and Bound* y *Branch and Cut* (Toth, 2000) (Ralphs., 2003) (Letchford, Lysgaard, & Eglese, 2006). Siendo estas dos opciones, situaciones en las que se necesitarían bastantes recursos de tiempo y computación, o en las que en algunos casos, resolver el problema sería prácticamente imposible. Debido a lo anterior, para dar una solución al VRP se usan técnicas aproximadas que permiten hallar una solución cercana a la óptima y en tiempos razonables. Estas técnicas están divididas en heurísticas clásicas y metaheurísticas (Laporte, Gendreau, Potvin, & Semet, 2000) .

La técnica de *Branch and Bound* consiste en ir construyendo un árbol con todas las posibles soluciones pero en el momento que una rama ya no sea la mejor, se deja de construir el árbol por esa rama, para ahorrar recursos computacionales, de esta manera se puede llegar a la solución óptima sin necesidad de explorar todas y cada una de las posibles soluciones.

Branch and Cut es una técnica derivada de *Branch and Bound* en donde se tratan los problemas combinatorios sin tener en cuenta la restricción de soluciones enteras, esto lo hace mediante el método simplex tradicional.

Las siguientes son algunas de las variantes más importantes del problema VRP las cuales se muestran en la figura 2.1:

- El problema de planeación de rutas vehiculares con capacidades - *Capacitated Vehicle Routing Problem* (CVRP). Trata de determinar los recorridos de una flota de vehículos con capacidad homogénea que parten de un origen común y deben pasar por un conjunto de lugares

de interés (clientes) para recoger o distribuir mercancías según la demanda y volver de nuevo al origen de manera que la distancia recorrida (el coste o el tiempo empleado) por la flota de vehículos sea mínima.

- El problema de planeación de rutas vehiculares con ventanas de tiempo – *Vehicle Routing Problem with Time Window* (VRPTW). Es un VRP que implica un intervalo de tiempo o lapso para cada cliente en el cual debe ser atendido.
- El problema de planeación de rutas vehiculares con capacidades y ventanas de tiempo – *Capacitated VRP with time Windows* (CVRPTW). Busca diseñar un mínimo costo para las rutas en una flota de vehículos con capacidad homogénea que sirven a diversos clientes con un límite de tiempo en la atención.
- El problema de planeación de rutas vehiculares con flota heterogénea – *Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem* (FSMVRP). Es un VRP donde los costos y la capacidad de la flota de vehículos varían.
- El problema de planeación de rutas vehiculares con recolección y entrega – *VRP with Pickup and Deliveries* (VRPPD). Es un VRP con la posibilidad que los clientes pueden devolver determinados bienes, por tanto, se debe tener presente la capacidad del vehículo. Esta restricción hace más difícil el problema de planificación lo que puede causar una mala utilización de las capacidades de los vehículos, aumento en distancias recorridas o un número mayor de vehículos. A este problema se le puede adicionar ventanas de tiempo asociadas a la recolección y entrega, problema conocido como VRPPDTW – *VRP with Pickup and Deliveries and Time Windows*.
- El problema de planeación de rutas vehiculares con múltiples depósitos – *Multiple Depot VRP* (MDVRP). Es un VRP de depósito múltiple (cada uno con una flota de vehículos independiente) que debe servir a todos los clientes. Una de las variantes a este problema surge al tener en cuenta ventanas de tiempo asociadas a cada cliente llamado MDVRPTW – *Multiple Depot VRP with Time Windows*.
- El problema de planeación de rutas vehiculares con periodicidad – *Periodic VRP* (PVRP). Contempla en su espacio de operación un rango de m días, periodo durante el cual cada cliente debe ser visitado una vez. El mismo planteamiento del problema PVRP puede ser usado con ventanas de tiempo PVRPTW – *Periodic VRP with Time Windows*.

- El problema de planeación de rutas vehiculares estocástico – *Stochastic VRP (SVRP)*. Es un VRP con uno o varios componentes aleatorios; clientes, demandas y tiempos estocásticos son las principales inclusiones en este tipo de problemas.
- El problema de la planeación de rutas con entrega dividida – *Split Delivery VRP (SDVRP)*. Es un VRP donde se permite que un cliente pueda ser atendido por varios vehículos si el costo total se reduce, lo cual es importante si el tamaño de los pedidos excede la capacidad de un vehículo. Al problema del SDVRP también se le puede contemplar ventanas de tiempo – *Split Delivery VRP with Time Windows*.

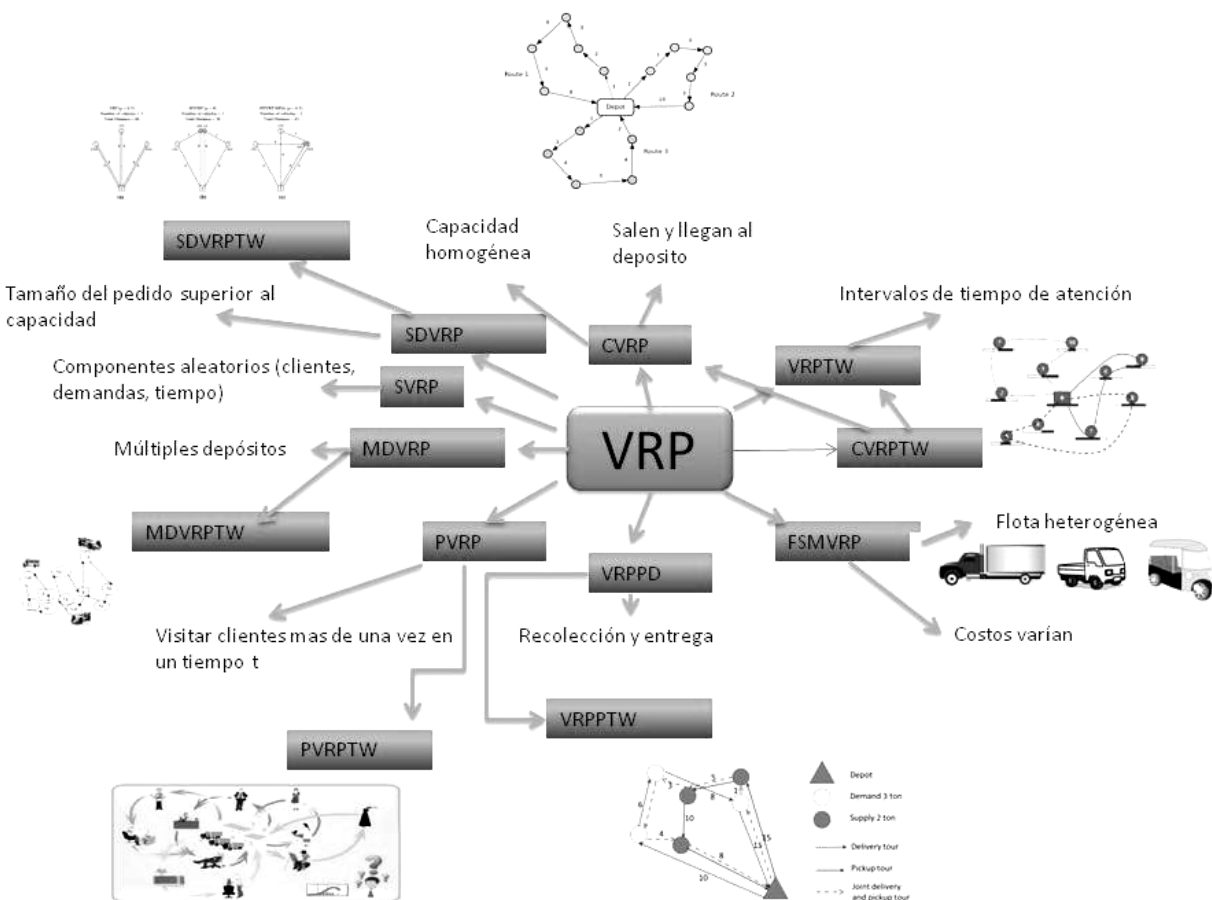


Figura 2.1: Variantes del problema de ruteo. Fuente el autor.

El problema de recolección básico se puede relacionar con el CVRP. Así, se puede definir el problema de la recolección como en designar varias rutas para prestar un servicio a varios

usuarios teniendo en cuenta la capacidad de la flota y la cantidad o demanda de capacidad por cada usuario.

2.2 PLANEACIÓN DE RUTAS.

El problema de planeación de rutas es uno de los principales problemas en la optimización de operaciones logísticas en sistemas de transporte que buscan primordialmente la reducción de costos. Este problema en el enrutamiento de transporte ha sido catalogado como NP Completo debido a la gran cantidad de consumo en recursos computacionales para encontrar una solución óptima que crece de forma exponencial con respecto al tamaño del problema, razón por la cual es tratado con algoritmos que no tienen la necesidad de explorar todo el espacio de búsqueda asociado para dar una respuesta aproximada. Los algoritmos metaheurísticos son una familia de algoritmos cuya meta es precisamente dar soluciones aproximadas a problemas generales de tipo NP, sin necesidad de recorrer todo el espacio de búsqueda. Las metaheurísticas son una derivación de las heurísticas clásicas. Las heurísticas clásicas realizan una exploración limitada sobre el espacio de búsqueda y normalmente las soluciones producidas son buenas en poco tiempo. Su implementación es sencilla y son fácilmente adaptadas a problemas del mundo real. Existen dos tipos de heurísticas: constructivas y de mejoramiento o de búsqueda local. Las metaheurísticas, por el contrario de las heurísticas, son un conjunto de conceptos diseñados para guiar a otras heurísticas en regiones específicas del espacio de búsqueda. Su ventaja es la exploración más profunda en el espacio de búsqueda pero a costa de mayor tiempo de procesamiento.

El problema de la planeación de rutas es uno de los problemas más comunes en la optimización de operaciones logísticas y por ende uno de los más estudiados. El planteamiento inicial del problema consiste en buscar la solución óptima con diversos parámetros proporcionados por el usuario como el número de vehículos, la capacidad de los vehículos, lugares a visitar (clientes) y su demanda. El desarrollo de soluciones al problema de planeación de rutas en el área de operaciones logísticas ha sido de gran ayuda a la hora de hacer planeaciones de tiempo, distancias e inversión.

2.3 PROBLEMA DE RUTEO DE VEHICULOS ABIERTO (OVRP)

Consiste en que los vehículos salen del depósito, recorren los puntos de los diferentes clientes asignados, pero no retornan al depósito, por lo que el recorrido puede terminar en cualquiera de las ubicaciones de los clientes. En las figuras 2.2 y 2.3 se muestran los grafos de los problemas VRP Y OVRP en donde se puede observar que los arcos de los clientes finales al depósito desaparecen. Esta situación se puede presentar en casos en los que se contrata el servicio de transporte, como lo es el caso de ruteo escolar. “Esta variación apareció en la literatura hace más de 20 años pero recientemente ha atraído la atención de profesionales e investigadores del área” (Li, Golden, & Wasil, 2007).

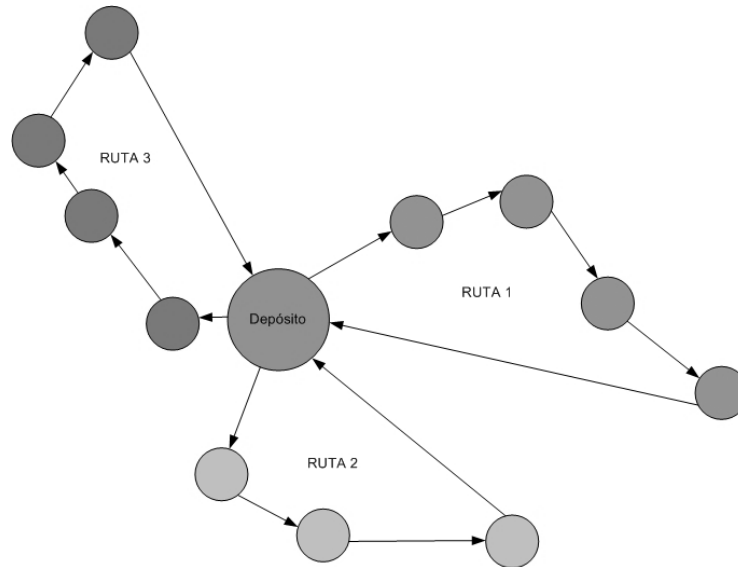


Figura 2.2: Grafo VRP. Fuente el autor.

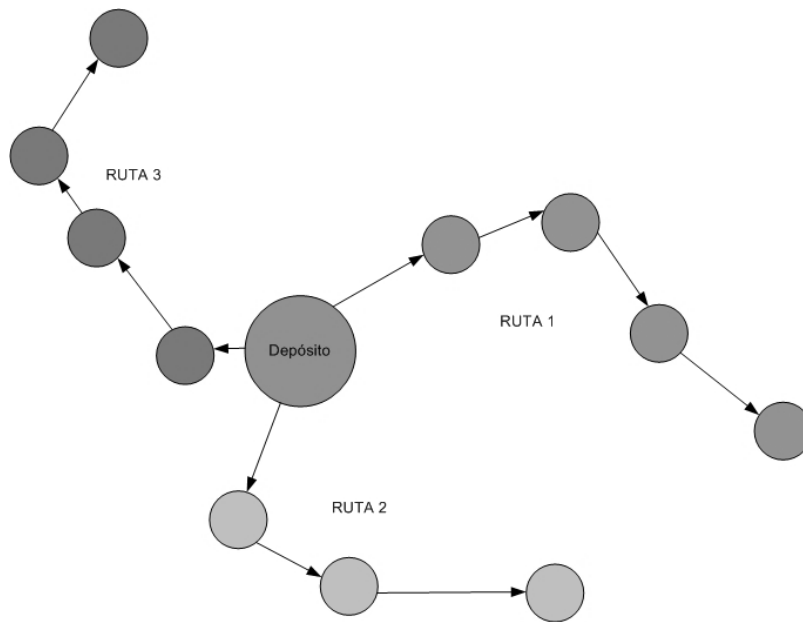


Figura 2.3: Grafo OVRP. Fuente el autor.

El OVRP básico puede ser descrito como sigue. Hay un depósito y un conjunto de clientes con demandas específicas. En el depósito se encuentra una flota de vehículos. Cada vehículo tiene su propia capacidad especificada y el costo operativo. El costo de viajar entre el depósito y los clientes, así como entre cualquier par de clientes se conoce. Entonces, el problema consiste en encontrar el conjunto de rutas que minimicen dos objetivos: (1) el número total de vehículos necesarios para servir a todos los clientes, y (2) el costo total de los viajes; al tiempo que satisface las siguientes tres limitaciones principales: (1) cada ruta se origina en el depósito y termina en uno de los clientes, (2) cada cliente es visitado una vez y sólo una vez por exactamente un vehículo y su demanda es totalmente satisfecha, y (3) los clientes que se visitan en cada ruta tienen demanda total inferior o igual a la capacidad del vehículo asignado para servir a la ruta.

Se supone que el costo de capital de un vehículo adicional siempre superará los gastos de viaje que podrían salvarse por su uso. Por lo tanto, se le da la prioridad al primer objetivo. Al igual que el VRP básico, las variantes surgen cuando la restricción de longitud total de una ruta se introduce, o los vehículos disponibles no son todos idénticos, y así sucesivamente.

Los OVRPs se crean para una empresa que no es dueña de una flota de vehículos en absoluto, o su flota de vehículos es inapropiada o insuficiente para satisfacer la demanda de sus clientes. Por lo tanto, la empresa tiene que contratar la totalidad o parte de su entrega de las mercancías o recogida de transportistas externos. Los vehículos de alquiler no son obligados a regresar a la estación y el costo para la empresa puede depender de la distancia recorrida mientras se carga, es decir, la longitud de las rutas abiertas. Otras áreas donde las aplicaciones se pueden encontrar para el OVRP son ferrocarril, autobús y transporte aéreo, en el que los vehículos (trenes, autobuses y aviones) suelen realizar rutas abiertas, y los problemas son por lo general los que tienen recogida simultánea y entrega, y ventanas de tiempo.

El problema se puede dividir en los siguientes tres tipos:

Entrega solamente. Los vehículos se asignan a la entrega en rutas en las que no tienen que volver al centro de distribución de la empresa.

Recoger solamente. Los vehículos son asignados a rutas en el que pueden iniciar directamente en uno de los clientes y terminar las rutas en la estación.

Tanto la entrega y recogida. Después de terminar todas las entregas, los vehículos regresan al depósito siguiendo la ruta de entrega, visita a los clientes en el orden inverso y recoge los bienes que deben ser enviados al centro de distribución o después de terminar la recolección, de regreso de la estación entrega los bienes a los clientes en el orden inverso. Este es, de hecho, un caso especial del VRP con viajes de regreso, en el que los vehículos pueden visitar diferentes clientes siguiendo diferentes rutas en los viajes de regreso.

La asignación de funciones de distribución logística a terceros (3PL) proveedores es una práctica comercial beneficiosa para varias empresas. Por ejemplo, cuando una empresa tiene su propia flota y la demanda de los clientes varía con el tiempo, la solución al problema de rutas para vehículos abiertos (OVRP) proporcionará la combinación adecuada de los vehículos de su propiedad y contratados (Repoussis, Tarantilis, & G, 2007). Del mismo modo, las empresas que tienen un gran número de entregas pueden encontrarse con el mismo tipo de problema. Aunque la contratación de vehículos es más cara por unidad de distancia recorrida (DT), una serie de costos, tales como los costos de capital, mantenimiento y depreciación, no se producen

(Tarantilis, Diakoulaki, & Kiranoudis, Combination of geographical information system and effective routing algorithms for real life distribution operations, 2004) (Tarantilis, Kiranoudis, Ioannou, & Prastacos, 2005). Típicos ejemplos OVRP de la vida real son la entrega a domicilio de los paquetes y periódicos (Russell, Chiang, & Zepeda, 2008). Recientemente, Repoussis et al. (Repoussis, Paraskevopoulos, Zobolas, Tarantilis, & Ioannou, 2009) desarrolló un sistema de soporte de decisiones basada en la web para una aplicación OVRP de la vida real relativo a la distribución de productos lubricantes. En todos los casos, los contratistas que no son empleados de la empresa de entrega utilizan sus propios vehículos y no regresan a la estación, pero su factura está basada en el total DT desde el depósito hasta el cliente final. Cuando todas las entregas se han completado, el recorrido y el tiempo asociados con cada vehículo se registra y los conductores son libres de regresar a su ubicación preferida, ya que esta parte del viaje no es reembolsado. Además, se supone que el coste de un vehículo adicional siempre supera a los gastos de viaje que podrían salvarse por su uso. Esto último refleja el compromiso entre el coste de contratación de vehículos y costo de transporte expresada en términos de DT.

Desde el punto de vista de la teoría de grafos, la diferencia entre el OVRP y el problema de ruteo de vehículos clásicos (VRP) consiste en que en la primera está compuesta por un conjunto de caminos hamiltonianos, en lugar de ciclos hamiltonianos. El problema es encontrar el mejor camino hamiltoniano para cada conjunto de clientes una vez que se asignan a un vehículo es NP-hard (Syslo, Deo, & Kowalik). De ahí OVRP también es NP-duro (Brandao, 2004) .

2.4 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

En las tablas 2.1 a 2.7 se muestra un análisis concreto de los artículos estudiados para la elaboración de este trabajo, en ella se especifican los diferentes modelos trabajados y sus especificaciones, es de notar que se presentan artículos con modelos de transporte abierto, balanceados y multiobjetivo así como algunos que ayudaron a construir el estado del arte.

Tabla 2.1: Revisión de artículos parte 1

Título del artículo	Problema	Método de solución	Codificación	Número de nodos	Pruebas
Diseño y optimización de rutas y frecuencias en el transporte colectivo urbano, modelos y algoritmos.	Estudio de diferentes modelos de transporte y metodología de solución	Análisis del estado del arte	Los algoritmos estudiados partes de una solución inicial que se mejoran de forma iterativa.		
<i>A simulated annealing heuristic for the capacitated location routing problem</i>	VRP capacitado	Recocido simulado (SA) basado en heurística para resolver el LRP. La heurística propuesta es llamada SALRP	Heurística SALRP tradicional más codificación de respuesta que integra ubicación y decisiones de encaminamiento	# instancias diferentes: 20 clientes y 5 depósitos De 20 a 200 clientes con 5 a 10 depósitos. 100, 150 o 200 clientes y el número de depósitos es 10 o bien 1 20	Comparación con literatura
<i>The open vehicle routing problem: Algorithms, large-scale test problems, and computational results</i>	OVRP para minimizar número total de vehículos y distancia total	<i>Record-to-record travel</i> (OROTR) que fue desarrollado por Dueck como una variante determinista del recocido simulado.	Se inicia con algoritmo de barrido y después se fusionan rutas que no excedan capacidad y longitud de ruta	50 a 199 nodos	Comparación con literatura

Tabla 2.2: Revisión de artículos parte 2

Título del artículo	Problema	Método de solución	Codificación	Número de nodos	Pruebas
Un modelo de programación lineal entera mixta para el problema de ruteo de vehículos en el transporte escolar	Ruteo de Vehículos para el Transporte Escolar RVTE que minimiza el costo de las rutas y la distancia total que deben caminar los clientes asignados al paradero.	Programación Lineal Entera Mixta basado en Flujo <i>Multicommodity</i>		10, 15, 21, 25 y 30 nodos	Se trata de método exacto.
<i>Solving of school bus routing problem by ant colony optimization</i>	RVTE	Colonia de hormigas (ACO)	<i>Cluster-first route-second</i>	367 nodos y 398 nodos	Comparación con las rutas anteriormente usadas
<i>A mathematical formulation for a school bus routing</i>	Programación lineal entera mixta para el problema de ruteo de vehículos escolares	Solucionador de IP comercial	Inclusión paulatina de restricciones de sub-tour	10 nodos	Se trata de un método exacto.
<i>A Bumble Bees Mating Optimization algorithm for the Open Vehicle Routing Problem</i>	OVRP con restricciones de capacidad y longitud de ruta	BBMOOVRP algoritmo basado en la reproducción de las abejas modificado.	Proceso de reproducción de abejas en la que en la fase de mutación se introduce una estrategia de expansión llamada <i>Neighborhood Search</i> (ENS). Los problemas primero se resuelven minimizando el número de vehículos y después para este número de vehículos minimizando el recorrido.	51 a 480 nodos	Comparación con literatura

Tabla 2.3: Revisión de artículos parte 3

Título del artículo	Problema	Método de solución	Codificación	Número de nodos	Pruebas
<i>An ACO hybrid metaheuristic for close-open vehicle routing problems with time windows and fuzzy constraints</i>	OVRP con ventanas de tiempo y restricciones difusas (COVRTW)	Heurística híbrida entre ACO, GRASP y VNS	En cada iteración del ACO, cada hormiga construye una solución completa del problema, GRASP genera nuevas soluciones utilizando esta información y VNS mejora la mejor solución obtenida en cada iteración mediante la aplicación de una serie de movimientos entre barrios	91 nodos	Comparación con soluciones obtenidas únicamente con GRASP y GRASP-VNS
<i>Multi-start algorithm for a balanced real-world Open Vehicle Routing Problem</i>	Se resuelve un OVRP en el que el número de autobuses es fijo y se debe minimizar el tiempo que permanece una persona en la ruta)	Algoritmo multi-arranque	Se trabaja en dos fases: La primera fase (fase de construcción) genera una solución factible y la segunda fase (fase de búsqueda local) intenta mejorar el resultado.	Entre 5 y 58 nodos. Problema real con 62 hasta 363 nodos.	Los problemas de prueba se comparan con resultados de la literatura. El problema real se comparó con soluciones anteriormente implementadas.
<i>A New Tabu Search Heuristic for the Open Vehicle Routing Problem</i>	OVRP	Búsqueda Tabú	Se usa una estructura de vecindad en la cual se exploran soluciones mediante 4 tipos de movimientos seleccionados al azar. Además se introduce una penalización al exceso de carga y duración de la ruta en la evaluación de las soluciones.	Problemas tomados Christofides et al. (50 a 199 nodos).	Los problemas de prueba se comparan con resultados de la literatura. Sariklis and Powell y Brandao.

Tabla 2.4: Revisión de artículos parte 4

Título del artículo	Problema	Método de solución	Codificación	Número de nodos	Pruebas
<i>An Improved Tabu Search for Open Vehicle Routing Problem</i>	OVRP con capacidad uniforme	Búsqueda Tabú	Se usa una estructura de vecindad en la cual se exploran soluciones mediante 2 tipos de movimientos. Se introduce una función objetivo que busca minimizar el costo de la ruta y lleva implícita la minimización de número de vehículos.	Problemas tomados Christofides et al. (50 a 199 nodos).	Los problemas de prueba se compararon con resultados de la literatura obtenidos por Brandao.
<i>A variable neighbourhood search algorithm for the open vehicle routing problem</i>	OVRP con y sin límite de longitud de ruta	Heurística de vecindario variable (VNS)	VNS propuesto tiene una estructura de vecindad, que se basa en revertir los segmentos de rutas (sub-rutas) y el intercambio de segmentos entre rutas. El tamaño de los barrios es limitado al permitir que sólo los intercambios que son factibles en términos de la capacidad del vehículo.	Christofides et al. y de Fishe así como Brandao (50 a 199 nodos)	Los problemas de prueba se compararon con resultados de la literatura.
<i>Improved load balancing and resource utilization for the Skill Vehicle Routing Problem</i>	Balanceo de rutas	Minmax	Modelo minmax que tiene como objetivo minimizar la longitud máxima del recorrido del vehículo. En segundo lugar, se propone un método de dos pasos Minmax con un modelo de distancia limitada	<i>Solomon's benchmark instances</i> (183 casos)	Comparación con la literatura

Tabla 2.5: Revisión de artículos parte 5

Título del artículo	Problema	Método de solución	Codificación	Número de nodos	Pruebas
<i>An open vehicle routing problema metaheuristic for examining wide solution neighborhoods</i>	OVRP	Metaheurística que adopta el concepto estático descriptor movimiento (SMD) para reducir la complejidad de la búsqueda local	La idea central del concepto SMD es que al pasar de una solución a otra, solamente una parte limitada de solución es modificada, por lo que para examinar los barrios posteriores, sólo los movimientos tentativos que hacen referencia a esta parte de la solución modificada deben ser re-evaluado	7 instancias CVRP tomadas de Christofides et al. con 50 a 199 nodos, dos instancias de Fisher y 8 problemas de gran escala con 200 a 480 nodos de Li et al	Comparación con la literatura
Solución del problema de ruteamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases.	Ruteamiento de vehículos con limitaciones de capacidad y flota homogénea (CVRP-HF)	Búsqueda TABU	Se propone un algoritmo metaheurístico que consta de la combinación de dos fases: diseño de rutas y planificación de la flota. La primera fase está compuesta de procedimientos heurísticos y metaheurísticos donde se construye una solución inicial que es mejorada mediante búsqueda tabú obteniendo soluciones no dominadas en tiempo de cálculo polinomial. Para la segunda fase, correspondiente a la planificación (<i>scheduling</i>) de la flota, se propone abordar el problema partiendo de una analogía con el problema de programación de máquinas paralelas idénticas. Este procedimiento tiene como función objetivo minimizar el costo fijo causado por la utilización de la capacidad instalada.	Aplicación en problema real.	Comparación de solución de algoritmo de ahorros, (Snyder, 2004), búsqueda tabú sin criterios de aspiración (Cabarcas, 2002), inserción más próxima multipunto (Filadelfo y Pérez, 2003)

Tabla 2.6: Revisión de artículos parte 6

Título del artículo	Problema	Método de solución	Codificación	Número de nodos	Pruebas
<i>A branch-and-cut algorithm for the capacitated open vehicle routing problem</i>	Algoritmo de optimización exacto para la versión abierta del CVRP	Algoritmo <i>branch-and-cut</i>	Modelo de optimización exacto en lenguaje C++	68 casos de entre 16 y 200 nodos	www.branchandcut.org casos A, B, E, F, M y P se compara modelo VRP CON OVRP
<i>Location-Routing Problems with Distance Constraints</i>	Modelo de enrutamiento de ubicación con restricciones de distancias	<i>A branch and price algorithm is developed to solve instances of the model</i>	Para el modelo LRP-DC, se usa la generación de columnas. Para resolver la relajación del LP. Desarrollo de rutinas específicas para crear una solución inicial, resolviendo el problema de precios, generando un límite superior en el nodo raíz, y eligiendo una ramificación variable	Conjunto de 8 instancias base, cada uno con 100 clientes y 10 instalaciones candidatas. Alquileres (Solomon)	Comparación de LP Relaxation Bounds of Weak Formulation y Strong Formulation
<i>Target aiming Pareto search and its application to the vehicle routing problem with route balancing</i>	VRPRB	El método, llamado <i>Target Aiming Pareto Search</i> , se define para hibridar un algoritmo genético multi-objetivo para el VRPRB que usa búsquedas locales	Optimización combinatoria multiobjetivo. (MOCO) programada mediante heurística de búsqueda local una metodología que utiliza una heurística inicial para generar una aproximación, que luego se mejora mediante la aplicación de un segundo algoritmo. Método que utiliza LS diseñado para hibridar un algoritmo genético para un bi-objetivo	Instancias C. Christofides y Taillard . El número de clientes varía de 50 a 199	Comparison between the hybrid meta-heuristic and NSGAu II (using the S metric)

Tabla 2.7: Revisión de artículos parte 7

Título del artículo	Problema	Método de solución	Codificación	Número de nodos	Pruebas
<i>Effect of the Initial Solutions to Balance Routes in Vehicle Routing Problem with Time Windows</i>	VRPTW; minimizar la distancia recorrida y la diferencia entre la ruta más larga y la ruta más corta.	Algoritmo metaheurístico basado en la búsqueda de dispersión (SS) Propuestos por Molina et al. para optimización multiobjetivo no lineal.	Se formula un modelo lineal mixto de dos objetivos. y se propone un enfoque de solución, basado en metaheurísticas. Se estudia el rendimiento de tres formas diferentes de construir la solución inicial y observar su impacto en los frentes de Pareto	Instancias de Solomon de 50 y 100 clientes y caso real de Tenerife, España	Para evaluar la calidad de la los frentes aproximado, se compararon con los frentes óptimos obtenidos por el modelo desarrollado y el método de suma ponderada
<i>Distance-constrained capacitated vehicle routing problems with flexible assignment of start and end depots</i>	DCVRP Fix y DCVRP Flex	Propone dos restricciones de distancia	<i>Network models</i> y programación entera mixta	Caso real de área rectangular (20 km × 10 km) de Singapurx	A casos de 2 a 8 clientes cada uno con 6 conjuntos aleatorios de matrices euclidianas

2.5 CLASIFICACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN PARA RESOLVER LOS OVRPS

El problema de enrutamiento de vehículos es considerado un problema de optimización combinatoria y pertenece a los problemas NP-complejos, para los que no existe un algoritmo en tiempo polinomial que puede resolverlos a optimalidad. Esto ha llevado a muchos investigadores a explorar diversos métodos para abordarlos. La mayoría de estos métodos pueden ser ampliamente clasificados ya sea como algoritmos exactos o de optimización (Aarts y Lenstra, 2003).

Los algoritmos exactos son los que producen una solución óptima empleando varias técnicas que permitan explorar el espacio de búsqueda. Estos métodos exactos incluyen los que se basan en técnicas como ramificación y acotamiento, planos constantes y programación lógica de restricciones. Estos algoritmos son razonablemente eficientes para problemas de tamaño modesto

(Ignizio y Cavalier , 1994) aunque con ellos no es posible en principio resolver de cualquier tamaño, en la práctica no es así, debido al gran número de soluciones posibles para cualquier problema de tamaño razonable.

En la actualidad, la atención se ha centrado más y más en el uso de métodos de optimización combinatoria, debido a la complejidad de estos problemas en la obtención de soluciones óptimas en tiempo polinomial. Estas técnicas se dividen en técnicas de optimización local convencional (heurísticas) y técnicas de optimización local inteligente (metaheurísticas). A diferencia de un enfoque algorítmico (exacto) un método de optimización no tiene una base de matemática formal que lo sustente, es desarrollado más o menos por intuición (Ignizio y Cavalier , 1994).

La idea más genérica del término heurística está relacionada con la tarea de resolver inteligentemente problemas reales usando el conocimiento disponible (Narducci, 2005). Heurística proviene de una palabra griega con un significado relacionado con el concepto de encontrar y se vincula a la supuesta exclamación eureka de Arquímedes al descubrir su famoso principio (De la Cruz, 2003). Reeves (1996) define el término heurística de la siguiente forma: "Una técnica heurística (o simplemente una heurística) es un método que busca buenas soluciones (es decir, soluciones cercanas al óptimo) a un costo computacional razonable sin poder garantizar optimalidad".

Las técnicas heurísticas para el VRP, en general, pueden ser clasificadas dentro de cuatro categorías (Gaskell, 1967), así: constructivas, como el método de los ahorros de Clarke y Wright, con base en el ahorro generado por insertar nuevos clientes en cada vehículo hasta completar una solución final; métodos de agrupar primero, luego enrutar, que agrupan los clientes en varios subconjuntos, asignan cada subconjunto a un vehículo y luego resuelven cada TSP correspondiente (por ejemplo, el método de Fisher y Jaikumar, basado en el problema de asignación generalizado y el algoritmo de barrido de Gillet y Miller); métodos heurísticos de enrutar primero, luego agrupar, que empiezan resolviendo el TSP definido por todos los clientes y luego parten la ruta hallada para asignar un tramo a cada vehículo (como el método de curvas de llenado de Bowerman, Calamai y Brenthall, y el método de partición óptima de Beasley); y finalmente, los métodos de mejoramiento, como los intercambios Or-Opt.

Las meta-heurísticas (también llamadas heurísticas modernas) han aparecido durante las últimas dos décadas (Yu, 1998) y tienen como función tomar inicialmente una solución factible, para luego mejorarla usando heurísticas de mejoramiento embebidas en una estructura más general. La característica común de estos enfoques es el uso de mecanismos para evadir óptimos locales (Moraga, 2002). Glover y Laguna (1997) definen el término "meta-heurística" como una estrategia maestra que guía y modifica otras heurísticas para producir soluciones más allá de aquéllas que son normalmente generadas en una solicitud por optimalidad local. Las heurísticas guiadas por tal metaestrategia pueden ser procedimientos de alto nivel o nada más que una descripción de movidas disponibles para transformar una solución en otra, junto con reglas de evaluación asociadas.

Por otra parte, entre las técnicas meta-heurísticas para el VRP se encuentran las colonias de hormigas, búsqueda dispersa, algoritmos genéticos y la búsqueda tabú, entre otras. En la figura 2.4 se puede observar un compendio de las técnicas meta-heurísticas utilizadas para resolver los problemas de optimización combinatoria. Se puede observar que se han empleado varias estrategias para resolver el problema, que se pueden agrupar en tres grandes categorías: búsqueda secuencial por entornos (o vecindarios), redes neuronales y algoritmos evolutivos. Dentro de cada categoría se encuentran subclasificaciones, con el fin de especificar las características de los procedimientos, según sean probabilistas o deterministas, con uno o varios operadores, constructivos, con perturbaciones, con cruzamiento de información o sin él, etc.

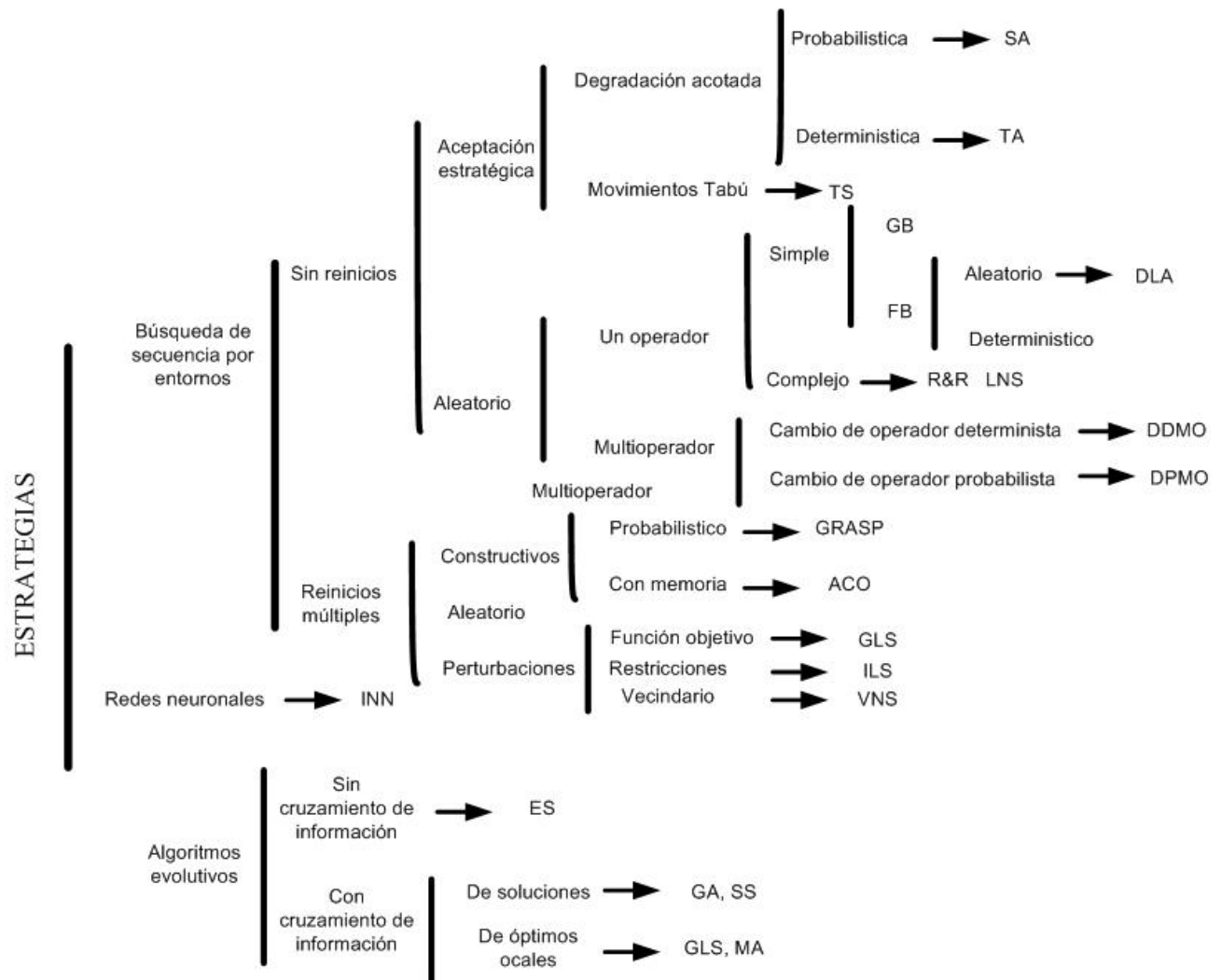


Figura 2.4: Estrategias de solución de optimización combinatoria. DAZA Julio Mario, MONTOYA Jairo R. NARDUCCI Francesco (2009). SOLVING THE CAPACITATED VEHICLE ROUTING PROBLEM USING A TWO PHASE METAHEURISTIC PROCEDURE. Rev.EIA.Esc.Ing.Antioq no.12 Envigado July/Dec. 2009

2.6 ENRUTAMIENTO ÓPTIMO DE VEHÍCULOS CONSIDERANDO EFECTOS AMBIENTALES

2.6.1 CÁLCULO DEL CONSUMO DE COMBUSTIBLE (Eliana M. Toro, 2017)

En esta sección se describe un nuevo modelo matemático usado para calcular el consumo de combustible entre dos nodos. El modelo es desarrollado basado en las fuerzas que actúan sobre el vehículo, tal como se muestra en la figura 2.5.

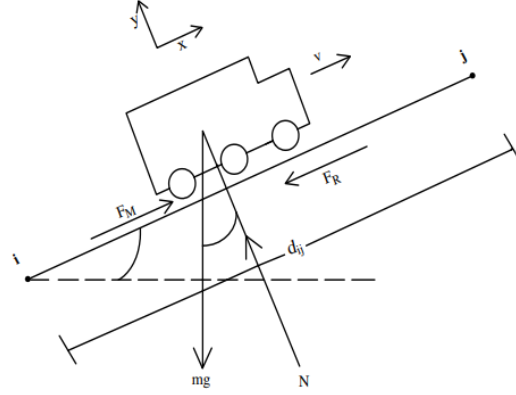


Figura 2.5: Fuerzas actuando sobre el vehículo. A multi-objective model for the green capacitated location-routing problem considering environmental impact. TORO Eliana M., FRANCO John F., ECHEVERRY Mauricio Granada, GUIMARÃES Frederico Gadelha. Computers & Industrial Engineering 2017

En la figura 2.5, β_{ij} representa el promedio de inclinación del camino que se forma entre los nodos i y j , $\overrightarrow{F_R}$ representa las fuerzas que se oponen al movimiento del vehículo en la dirección de x , $\overrightarrow{F_M}$ representa las fuerzas generadas por el motor y transmitidas a las llantas del vehículo, $m\vec{g}$ es el peso del vehículo, que incluye peso del vehículo y carga, $(m \times \vec{g})$, \vec{N} es la fuerza normal de la superficie inclinada sobre el vehículo, v_{ij} corresponde a la velocidad del vehículo en estado estacionario, d_{ij} es la distancia viajada entre los nodos i and j . La fuerza $\overrightarrow{F_R}$ consta de los siguientes componentes:

$$\overrightarrow{F_R} = \overrightarrow{F_{R,llantas}} + \overrightarrow{F_{R,viento}} + \overrightarrow{F_{R,internas}} + \frac{mv_{ij}^2}{2d_{ij}} \quad (2.1)$$

El vector $\overrightarrow{F_{R,llantas}}$ representa la fuerza ejercida entre las llantas sin tracción y el terreno que se opone al movimiento del vehículo; $\overrightarrow{F_{R,viento}}$ es la fuerza ejercida por el viento en contra del movimiento del vehículo; $\overrightarrow{F_{R,internas}}$ representa la fuerza equivalente asociada a las fuerzas internas que se oponen al movimiento del vehículo; y $\frac{mv_{ij}^2}{2d_{ij}}$ es la fuerza requerida por el vehículo para alcanzar la energía cinética en estado estacionario. La masa del vehículo esta dada por la masa del vehículo en vacío m_0 y la carga transportada entre los nodos i y j (Xiao et al., 2012)

$$m = m_0 + t_{ij} \quad (2.2)$$

El balance de fuerzas esta desarrollado como sigue (asumiendo velocidad constante):

$$\sum F_x = ma_x \quad a_x = 0 \quad (2.3)$$

$$\sum F_y = ma_y \quad a_y = 0 \quad (2.4)$$

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow F_M - F_R - mg \sin \beta_{ij} = 0 \quad (2.5)$$

$$\sum F_y = ma_y \rightarrow N - mg \cos \beta_{ij} = 0 \quad (2.6)$$

Por definición, $\overrightarrow{F_R, llantas} = Nb$, donde b es una constante que depende del terreno y tipo de llantas del vehículo. Reemplazando (2.5), (2.6) en (2.1) se obtiene (2.7).

$$\overrightarrow{F_M} = (mg \cos \beta_{ij})b + \overrightarrow{F_{R,viento}} + \overrightarrow{F_{R,internas}} + \frac{mv_{ij}^2}{2d_{ij}} + mg \sin \beta_{ij} \quad (2.7)$$

La fuerza que el motor transmite a la llanta $\overrightarrow{F_M}$, multiplicada por la distancia d_{ij} , equivale al trabajo $U_{ij} = FMd_{ij}$, es dada en (2.8).

$$U_{ij} = \left[(m_0 + t_{ij})gbcos\beta_{ij} + F_{R,viento} + F_{R,internas} + \frac{(m_0 + t_{ij})v_{ij}^2}{2d_{ij}} + (m_0 + t_{ij})gbsin\beta_{ij} \right] d_{ij} \quad (2.8)$$

El trabajo es dividido en dos componentes, el que se efectúa para desplazar la masa del vehículo operando en vacío y el que se realiza para desplazar la carga, como es descrito en (2.9).

$$U_{ij} = \left[m_0 g \left(b \cos \beta_{ij} + \sin \beta_{ij} + \frac{mv_{ij}^2}{2gd_{ij}} \right) + F_{R,viento} + F_{R,internas} \right] d_{ij} + \left[g(b \cos \beta_{ij} + \sin \beta_{ij} + \frac{mv_{ij}^2}{2gd_{ij}}) \right] t_{ij} d_{ij} \quad (2.9)$$

(2.9) está compuesta de dos términos: la primera parte de la ecuación corresponde al trabajo para desplazar la masa del vehículo en vacío (2.10) :

$$U_{ij}^1 = \left[m_0 g \left(b \cos \beta_{ij} + \sin \beta_{ij} + \frac{mv_{ij}^2}{2gd_{ij}} \right) + F_{R,viento} + F_{R,internas} \right] d_{ij} \quad (2.10)$$

La expresión anterior es simplificada al considerar que algunos de los términos asumen valores constantes como se expresa en (2.11) y (2.12).

$$F_{R(v)} = F_{R,viento} + F_{R,internas} \quad (2.11)$$

Por tanto:

$$\alpha_{ij} = m_0 g \left(b \cos \beta_{ij} + \sin \beta_{ij} + \frac{mv_{ij}^2}{2gd} \right) + F_{R(v)} \quad (2.12)$$

U_{ij}^1 corresponde al trabajo para desplazar el vehículo vacío en el arco (i, j) como se presenta en (2.13):

$$U_{ij}^1 = \alpha_{ij} \times d_{ij} \quad (2.13)$$

α_{ij} depende del peso propio del vehículo, de la pendiente del arco (i, j), de la resistencia al movimiento entre las llantas y el terreno en el que se desplaza el vehículo y de la resistencia del camino, de las pérdidas internas del vehículo y de la resistencia del viento en contra de la marcha y de la energía requerida para que el vehículo alcance la velocidad de estado estacionario. Estas últimas dependen de la velocidad del vehículo.

El segundo término de (2.9) corresponde al trabajo para desplazar la carga, como se presenta en (2.14) :

$$U_{ij}^2 = \left[g(b\cos\beta_{ij} + \sin\beta_{ij} + \frac{mv_{ij}^2}{2gd_{ij}}) \right] t_{ij}d_{ij} \quad (2.14)$$

Como en el caso anterior, la expresión es simplificada al considerar que algunos de los términos asumen valores constantes y se obtiene:

$$\gamma_{ij} = g(b\cos\beta_{ij} + \sin\beta_{ij} + \frac{mv_{ij}^2}{2gd_{ij}}) \quad (2.15)$$

U_{ij}^2 corresponde al trabajo para desplazar la masa de la carga en el arco (i, j) y se presenta en (2.16):

$$U_{ij}^2 = \gamma_{ij} \times t_{ij} \times d_{ij} \quad (2.16)$$

γ_{ij} depende de la pendiente del arco (i, j), de la resistencia al movimiento entre las llantas, del terreno en el que se desplaza el vehículo y de la velocidad del vehículo en estado estacionario. Asumiendo velocidad constante, el trabajo total requerido para desplazar el vehículo en el arco (i, j) se obtiene (2.17) :

$$U_{ij} = U_{ij}^1 + U_{ij}^2 = \alpha_{ij}d_{ij} + \gamma_{ij}t_{ij}d_{ij} \quad (2.17)$$

El trabajo requerido desde el nodo i hacia el j tiene una componente que está relacionada con el vehículo en vacío, $\alpha_{ij}d_{ij}$, y otra componente que está relacionada con la carga así: $\gamma_{ij}t_{ij}d_{ij}$. Si no se tiene en cuenta la inclinación β_{ij} (o se asume la misma inclinación para todos los arcos) y se asume la misma velocidad para todos los arcos, entonces $\alpha_{ij} = \alpha$ and $\gamma_{ij} = \gamma$, se obtiene:

$$U_{ij} = \alpha d_{ij} + \gamma t_{ij}d_{ij} \quad (2.18)$$

El trabajo requerido para que el vehículo complete una ruta esta dada por la suma del trabajo requerido por cada arco. Si se asocian variables binarias a la utilización del arco (i, j) , es definido por las variables α_{ij} y x_{ij} , se tiene:

$$\sum_{i,j \in V} U_{ij} = \alpha \left(\sum_{i,j \in V} d_{ij} x_{ij} + \sum_{i,j \in V} d_{ij} \alpha_{ij} \right) + \gamma \left(\sum_{i,j \in V} d_{ij} t_{ij} \right) \quad (2.19)$$

La cantidad de gasolina para desarrollar el trabajo total $\sum_{i,j \in V} U_{ij}$ es obtenido con un factor de conversión E_1 (galones/J). La cantidad de emisiones por unidad de combustible está dada por otro valor de conversión E_2 (kg of (CO₂)/galones). Por lo tanto el total de emisiones es calculado como:

$$E_1 \times E_2 \times \sum_{i,j \in V} U_{ij} = E \times \sum_{i,j \in V} U_{ij} \quad (2.20)$$

El modelo desarrollado para calcular las emisiones es lineal como se muestra en (2.18), La (2.20) calcula el total de emisiones de (CO₂) como uno de los objetivos en esta formulación.

2.6.2 ENRUTAMIENTO ÓPTIMO DE VEHÍCULOS CONSIDERANDO EFECTOS AMBIENTALES

Recientes investigaciones se han centrado en la reducción de emisiones de gases de efecto invernadero (EGEI) como objetivo principal de problemas de enrutamiento óptimo de vehículos (VRP) en los cuales la minimización del consumo de combustible es el objetivo principal.

El problema es considerado como una extensión del problema clásico de ruteamiento de vehículos (VRP), sin embargo, algunos autores lo han considerado como una extensión del VRP con ventanas de tiempo VRPTW o del CVRP que considera la capacidad de los vehículos.

El dióxido de carbono (CO₂) es el gas de efecto invernadero que presenta mayor contribución en las emisiones de los vehículos (Zsigraiova, Semiao, & Beijoco, 2013), por lo cual ha sido de mayor interés para los investigadores. Las tasas de emisión de CO₂ son emitidas en proporción directa al consumo de combustible, con una variación por tipo de combustible (Figliozzi, 2010). Sin embargo el consumo de combustible es afectado por diversos factores, tales como, las velocidades de viaje, los tiempos de partida, la carga del vehículo, la pendiente de la carretera, el tipo y condición del vehículo y/o la congestión vehicular (tráfico).

Aunque los factores que afectan el consumo de combustible están relacionados, el análisis se ha efectuado de manera separada y distinta por diversos autores.

Tal es el caso de Figliozzi, (2010) quien ha comparando diferentes niveles de congestión vehicular y de velocidades de los vehículos, para formular y resolver el problema que ha denominado EVRP (del inglés *Emissions Vehicle Routing Problem*). El problema es una extensión del VRPTW, donde han sido involucrados las velocidades de viaje y los tiempos de partida como variables de decisión, esto debido, a que frecuentes cambios en la velocidad como “parar y seguir” en condiciones de tráfico vehicular incrementa las tasas de emisión, por lo cual, el consumo de combustible es una función no solo de la velocidad sino también de las tasas de aceleración.

El problema de EVRP con ventanas de tiempo, toma en cuenta que los arcos en una red tienen diferentes costos o velocidades durante el día. Para involucrar los efectos de la congestión vehicular, el tiempo de trabajo del depósito $[a_0, b_0]$ es particionado en M periodos de tiempo $T = T^1, T^2, \dots, T^M$, donde cada periodo de tiempo T tiene asociado una velocidad de viaje constante, en el intervalo de tiempo $T^m = \{T^m, T^m\}$. Así, para cada tiempo de salida y cada par de clientes (i, j) , un vehículo viaja a un conjunto no vacío de intervalos de velocidades. Los costos de emisión son proporcionales a la cantidad de gas emitida, el cual es una función de la velocidad de viaje y de la distancia viajada. El investigador asume un valor en el mercado para 1 ton de CO_2 emitida, además de las siguientes condiciones:

- El tiempo de viaje entre dos vértices debe ser igual a la sumatoria de los intervalos de tiempos de viaje entre los dos vértices.
- La distancia entre dos vértices debe ser igual a la sumatoria de las distancias dadas en los intervalos de tiempo
- Cada distancia dada en el intervalo depende del tiempo de viaje del intervalo por la velocidad del vehículo en ese intervalo.

Para vehículos pesados un laboratorio de investigación de transporte ha desarrollado una función que relaciona las emisiones y las velocidades de viaje la cual se muestra en la ecuación (2.21) de Figliozzi (2010), donde S_{ij}^l denota la velocidad del vehículo en el trayecto del cliente i al cliente j en el intervalo de tiempo l y d_{ij}^l la distancia entre el cliente i al cliente j en el intervalo de tiempo l .

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 s_{ij}^l + \alpha_2 (s_{ij}^l)^3 + \alpha_3 \frac{1}{(s_{ij}^l)^2} \right) d_{ij}^l \quad (2.21)$$

Los coeficientes α son parámetros constantes para cada tipo de vehículo, donde $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{1,576 ; -17.6 ; 0.00117 ; 36,067\}$. Para otros tipos de vehículos existen otros términos polinomiales o su inversa. La velocidad de viaje óptima que minimiza las emisiones está calculada en un promedio de 44 mph o 71 km/h.

Esta expresión da como resultado las emisiones producidas de CO₂ en kilogramos por kilometro cuando la velocidad es expresada en km/h.

Cuando la congestión incrementa, la cantidad y el costo de las emisiones aumenta dramáticamente. La ecuación (2.22) de Figliozzi (2010) muestra el volumen de emisiones generadas por viaje del cliente i al cliente j y partiendo en el tiempo b_i es denotado por:

$$V_{ij}(b_i) = \sum_{l=0}^{l=p} \left(\alpha_0 + \alpha_1 s_{ij}^l + \alpha_2 (s_{ij}^l)^3 + \alpha_3 \frac{1}{(s_{ij}^l)^2} \right) d_{ij}^l \quad (2.22)$$

Los costos totales de emisión para un tiempo de partida b_i están dados por el producto entre el costo por unidad de emisión (asumido por el investigador) y el volumen de emisiones generadas. De esta manera la función puede ser adaptada a las características de viaje o de camino entre los dos clientes.

En la formulación se presenta un problema multi-objetivo que incluye la minimización de los costos de los vehículos, la distancia viajada, la duración de la ruta y las emisiones de CO₂, sujeto a todas las restricciones de un problema VRPTW. Luego un análisis jerárquico permite dar solución al problema.

El problema parcial, puede ser resuelto con algoritmos para el problema de TWVRP. Una vez resuelto, hay dos alternativas:

- a) Los valores de las variables de decisión X_{ij}^k son fijados, y el volumen de emisiones es reducido por un algoritmo que puede alterar solamente los tiempos de *partida* $b_i = y_i^k + g_i$
- b) El volumen de emisiones es reducido por un algoritmo que puede alterar ambos los tiempos de partida $b_i = y_i^k + g_i$ y las variables asignadas $<$, sujeto a una restricción de vehículos que no puede exceder el mejor tamaño de flota obtenido con el algoritmo de TWVRP.

La estrategia implementada es primero minimizar el número de vehículos usando TWVRP y luego minimizar las emisiones de acuerdo a una restricción de tamaño de flota máximo. El algoritmo IRCI primero construye una ruta y luego la mejora, mediante dos algoritmos separados. El algoritmo construye rutas factibles adicionando clientes a la ruta, mediante una heurística golosa (*greddy heuristic*) para aproximar el costo de adicionar clientes a la ruta. Construyendo así un conjunto de rutas mejoradas.

El problema también ha sido denominado como FCVRP (del inglés *Fuel Consumption vehicle routing problem*), como una extensión del CVRP (Xiao, Zhao, Kaku, & Xu, 2012), en el cual, los autores han considerado una tasa de consumo de combustible que está fuertemente relacionada con el peso neto del vehículo, obtenido como la sumatoria entre el peso del vehículo vacío y el peso de la carga del vehículo como se ve en la ecuación (2.23). Al revisar si el peso del vehículo presenta una relación con las unidades de combustible consumidas por unidad de distancia, los autores encontraron que dichas variables están fuertemente relacionadas, hallando una ecuación lineal que representa el modelo, y que al generalizarla se podría presentar como:

$$p(Q_l) = \alpha(Q_0 + Q_l) + b \quad (2.23)$$

Donde Q es la capacidad máxima del vehículo y p_0 dado en la ecuación (2.24) es el peso del vehículo cuando este vacío, p^* el peso del vehículo cargado presentado en la ecuación (2.25) de donde podemos obtener el valor de α mostrado en la ecuación (2.26):

$$p_0 = \alpha Q_0 + b \quad (2.24)$$

$$p^* = \alpha(Q_0 + Q) + b \quad (2.25)$$

$$y \quad \alpha = \frac{p^* - p_o}{Q} \quad (2.26)$$

Entonces la ecuación (2.27) muestra una re-escrita:

$$p(Q_l) = p_o + \frac{p^* - p_o}{Q} Q_l \quad (2.27)$$

El costo del consumo de combustible es representado en la ecuación (2.28) como la multiplicación del costo unitario de combustible C_0 por el consumo de combustible a lo largo de la ruta p_{ij} por la distancia recorrida de i a j d_{ij} .

$$C_{fuel}^{ij} = C_0 p_{ij} d_{ij} \quad (2.28)$$

El costo del combustible consumido por un vehículo, considera la sumatoria de todos los arcos visitados en una ruta, así denotando r como el conjunto de clientes que conforma una ruta se tiene la ecuación (2.29):

$$C_{fuel} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r C_0 p_{ij} d_{ij} x_{ij} \quad (2.29)$$

Donde x_{ij} es una variable de decisión binaria que equivale a 1 si el arco $\{i, j\}$ existe. El consumo de combustible a lo largo de la ruta p_{ij} varía de acuerdo a la carga del vehículo entre cada nodo, así el peso de la carga que toma el vehículo es considerado una variable de decisión y_{ij} que es introducida en la ecuación anterior, así como lo muestra la ecuación (2.30):

$$p_{ij} = p_o + \frac{p^* - p_o}{Q} y_{ij} = p_o + \alpha y_{ij} \quad (2.30)$$

La función objetivo es formulada en la ecuación (2.31):

$$\text{Min } H = \sum_{j=1}^n F x_{oj} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n C_0 d_{ij} (p_o x_{ij} + \alpha y_{ij}) \quad (2.31)$$

Donde la primera parte de la ecuación corresponde a la suma de los costos fijos de utilizar todos los vehículos, y la segunda parte es la suma de los costos de combustible de todos los vehículos.

Las restricciones consideradas en la formulación de FCVRP son: Cada cliente debe ser visitado solo por un vehículo, si un vehículo llega a un cliente debe salir también (restricción de flujo), reducir la carga del vehículo cuando este visita a un cliente en la cantidad que demanda el cliente

(restricción que prohíbe también la generación de sub-tours), y una restricción de capacidad máxima del vehículo, que a su vez permite que la variable $y_{ij} = 0$ cuando $x_{ij} = 0$.

El consumo de combustible puede ser minimizado al diseñar una secuencia óptima de descarga de peso de los vehículos. Los autores demuestran con un pequeño ejemplo, que minimizar la distancia recorrida no es necesariamente suficiente para reducir el consumo de combustible. Atender a los clientes de mayor demanda primero, podría ocasionar que la distancia aumente, pero que el consumo de combustible disminuya.

El problema es resuelto con el algoritmo de *simulated annealing*, probado en 27 instancias, considerando entre 50 y 483 clientes, y codificado en C++ 6.0.

Adicionalmente la carga y la velocidad del vehículo han sido consideradas en un único problema (Bektaş & Laporte, 2011). Este problema ha sido denominado por los autores como *Pollution Routing Problem* (PRP), presentado como una extensión del clásico VRP. Los autores consideraron factores como la velocidad, la carga del vehículo y los costos del viaje. La carga y la velocidad de viaje son factores que se pueden controlar. Se han presentado 4 formulaciones matemáticas para el PRP con y sin ventanas de tiempo: primero consideraron una función objetivo para minimizar la distancia recorrida con velocidad constante, luego consideraron una función objetivo para minimizar la carga ponderada del vehículo con velocidad constante, adicionalmente una función objetivo que minimiza la energía y asume la velocidad como una decisión y por último una función objetivo que minimiza un costo, considerando el costo de conductores, combustible y emisiones.

La tasa de emisiones del motor en gramos por segundo (g/s), denotada como E está relacionada con la tasa de consumo de combustible F (g/s) a través de la relación en la ecuación (2.32):

$$E = \delta_1 F + \delta_2 \quad (2.32)$$

Donde δ_1 y δ_2 son parámetros indicados para emisiones de gases de efecto invernadero. El cálculo de F (tasa de consumo de combustible) depende de otros factores y se expresa como sigue en la ecuación (2.33):

$$\mathbf{F} \approx \left(KNV + \left(P_t/\varepsilon + P_a \right)/n \right) \mathbf{U} \quad (2.33)$$

Donde K representa el factor de fricción del motor, N es la velocidad del motor, V es el desplazamiento, P_t es la fuerza total de tracción demandada en watts en ecuación (2.34), ε es la eficiencia de transmisión del vehículo, P_a es la fuerza del motor asociada con pérdidas de funcionamiento y otros accesorios del vehículo, $n \approx 0.45$ es una medida de eficiencia para motores diesel y U es un valor que depende de la velocidad N .

Por su parte el parámetro P_t es calculado como:

$$P_t = Mav + Mgv \sin\theta + 0.5C_dApv^3 + MgC_r \cos\theta v \quad (2.34)$$

Donde, M es la masa en kilogramos del vehículo, v es la velocidad (m/s), a es la aceleración (m/s^2), g es la constante gravitacional ($9.81 m/s^2$), θ es el ángulo de la carretera, A es el área de la superficie frontal del vehículo (m^2), p es la densidad de aire (kg/m^3) y C_r y C_d son los coeficientes de resistencia de rodamiento y arrastre.

Los autores asumieron constantes todos los parámetros en el viaje de un vehículo en un arco dado, a excepción de la velocidad y la carga del vehículo. Es decir, asumieron que el vehículo viaja a una velocidad constante v_{ij} en un arco $\{i, j\}$ con distancia d_{ij} y ángulo de carretera $\theta = \theta_{ij}$ llevando un total de carga $M = w + f_{ij}$ donde w es el peso del vehículo vacío y f_{ij} es la carga llevada por el vehículo en el arco $\{i, j\}$.

Así la cantidad de energía consumida en un arco P_{ij} es aproximada como lo muestran las ecuaciones (2.35) y (2.36):

$$P_{ij} \approx P_t(d_{ij}/v_{ij}) \quad (2.35)$$

$$P_{ij} \approx \alpha_{ij}(w + f_{ij})d_{ij} + \beta v_{ij}^2 d_{ij} \quad (2.36)$$

Donde, $\alpha_{ij} = a + g\sin\theta_{ij} + gC_r\cos\theta_{ij}$ es constante en un arco específico y $\beta = 0.5C_dAp$ es constante en un vehículo específico. Así la primera parte de la ecuación representa el requerimiento de energía inducido por la carga y la segunda parte el requerimiento de energía inducido por la velocidad.

El resultado de la ecuación inicial asumiendo algunos factores como constantes, permite obtener una curva en U , en la cual para ciertos valores cuando la velocidad está por debajo y por encima de 40 km/h aumenta la tasa de consumo de combustible notablemente. Los costos asociados a la ruta, son calculados a través de los costos incurridos en cada arco $\{i, j\}$ expresados como el costo unitario de combustible multiplicado por el consumo de combustible en cada arco, el cual es estimado usando P_{ij} . También pueden ser incorporados costos adicionales de rodamiento como reparación y mantenimiento de vehículos.

Este modelo refleja el cambio en la carga del vehículo a medida que viaja y que es aplicable a la estimación de las emisiones de vehículos livianos y pesados.

A través de ejemplos pequeños los autores han comparado los efectos de un objetivo que minimice la distancia recorrida y un objetivo que minimice la carga que lleva el vehículo a medida que viaja entre clientes, obteniendo mejores resultados al minimizar la distancia recorrida, dado que este objetivo considera la carga y la velocidad es introducida como otro factor determinante. Para este caso la velocidad fue tomada con un límite inferior de 40 km/h y un límite superior de 70 km/h y se asumieron como constantes todos los demás parámetros.

También consideraron el impacto de la velocidad al involucrar restricciones de ventanas de tiempo en el problema. En este caso la velocidad es involucrada como una variable de decisión y la función objetivo es minimizar la energía consumida en la ruta. Los resultados obtenidos fueron mejores que en los casos anteriores considerando ventanas de tiempo.

El problema ha sido formulado inicialmente como un problema de Programación Lineal Entera. Otros autores consideraron la propuesta de Bektaş & Laporte, para otra variante del problema de VRP. Es el caso de Pradenas, Oportus, & Parada (2013), quienes formularon un modelo con emisiones de gases de efecto invernadero para el problema VRPB (*VRP with Backhauls*),

basados en la formulación de Bektaş & Laporte al igual que Toro & Granada (Granada-Echeverri, 2019).

Por otro lado, otros autores han revisado el problema desde las llamadas cadenas de suministro verdes, denominando el problema como *Green vehicle routing problem* (G-VRP) (Jemai, Zekri & Mellouli, 2012). Allí los autores consideraron un factor de conversión de combustible para calcular las emisiones de CO₂. El problema ha sido formulado como un problema bi-objetivo donde se minimiza la distancia recorrida y las emisiones de CO₂ y el algoritmo NSGA-II ha sido implementado en la solución. Otros por su parte han considerado el mismo problema involucrando en la ruta las estaciones de combustible y el consumo de combustible, considerando tasas de consumo constantes de acuerdo a la distancia recorrida (Erdoğan & Miller-Hooks, 2012). En este caso, los autores lo abordaron como un problema de programación lineal entera mixta, en el cual el objetivo es minimizar la distancia recorrida.

Autores como Suzuki, (2011) han considerado que otros factores afectan el consumo de combustible, como la pendiente de la carretera. En este trabajo se busca minimizar la distancia recorrida por un vehículo de reparto que debe viajar con una carga pesada, y en el trayecto descarga primero los elementos más pesados mientras que los elementos más ligeros se descargan al final, considerando la cantidad de combustible gastada durante el tiempo que un camión está detenido en las instalaciones del cliente. Para calcular el consumo de combustible utiliza una velocidad promedio para terrenos planos y para terrenos con inclinaciones positivas y negativas, formulando un modelo no lineal. Para instancias mayores a 15 nodos usaron técnicas meta-heurísticas en la solución del problema.

Otros autores, han considerado el factor de emisiones para diferentes tipos de flota manejando 3 escenarios: vehículos híbridos, camiones grandes y camiones pequeños, bajo el mismo tipo de combustible, pero con velocidades específicas y constantes de acuerdo con las zonas donde se transita (Wygonik & Goodchild, 2011).

En la tabla 2.8 a 2.12 se muestra una comparación de los modelos matemáticos que incluyen efectos ambientales.

Tabla 2.8: Comparación de modelos matemáticos del problema de ruteamiento de vehículos considerando efectos ambientales parte 1

Año	Autor	Tipo de problema	Consumo de combustible o volumen de emisiones contaminantes	Descripción	Restricciones
2010	Figliozzi	EVRPTW	$V_{ij}(b_i) = \sum_{l=0}^{l=p} \left(\alpha_0 + \alpha_1 s_{ij}^l + \alpha_2 (s_{ij}^l)^3 + \alpha_3 \frac{1}{(s_{ij}^l)^2} \right) d_{ij}^l$ <p>Función objetivo: MINLP</p> $\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{k \in K} \sum_{j \in C} C_k x_{oj}^k \\ & + C_d \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in V} d_{ij} x_{ij}^k + \\ & C_t \sum_{k \in K} \sum_{j \in C} (Y_{n+1}^k - Y_0^k) x_{oj}^k + \\ & \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in V} x_{ij}^k C_e V_{ij}(y_i^k + g_i) \end{aligned}$ <p>Costo del tipo de vehículo + costo de la distancia recorrida + el costo de duración de la ruta + el costo de emisiones de la ruta.</p>	<p>Volumen de emisiones generadas por viaje del cliente i al cliente j y partiendo en el tiempo b_i. Donde S_{ij}^l denota la velocidad del vehículo en el trayecto del cliente i al cliente j en el intervalo de tiempo l y d_{ij}^l la distancia entre el cliente i al cliente j en el intervalo de tiempo l, con parámetros α conocidos.</p> <p>x_{ij}^k es una variable de decisión binaria que indica si el vehículo k viaja entre los clientes i y j.</p> <p>y_i^k es una variable de decisión continua que indica el tiempo en que inicia el servicio, si el cliente i es atendido por el vehículo k.</p> <p>La hora de salida está dada por el tiempo de inicio de servicio al cliente y_i^k más el tiempo de carga o de servicio al cliente g_i</p>	<p>1) La capacidad del vehículo no puede ser excedida. 2) Todos los clientes deben ser servidos. 3) Si un vehículo llega a un cliente, este debe también partir del cliente. 4) Las rutas empiezan y terminan en el depósito. 5) Cada vehículo sale y retorna al depósito una única vez. 6) Los tiempos de servicio deben satisfacer los tiempos de inicio y finalización de la ventana de tiempo. 7) El tiempo de inicio del servicio debe permitir el tiempo de viaje entre los clientes</p> <p>Técnica de Solución: Heurísticas: greddy heuristic</p>

Tabla 2.9: Comparación de modelos matemáticos del problema de ruteamiento de vehículos considerando efectos ambientales parte 2

Año	Autor	Tipo de problema	Consumo de combustible o volumen de emisiones contaminantes	Descripción	Restricciones
2012	Xiao, Zhao, Kaku, & Xu	FCVRP con flota homogénea	$C_{fuel} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r C_0 p_{ij} d_{ij} x_{ij}$ <p>Donde:</p> $p_{ij} = p_o + \frac{p^* - p_o}{Q} y_{ij} = p_o + \alpha y_{ij}$ <p>Función objetivo: MILP</p> $\begin{aligned} \text{Min } H &= \sum_{j=1}^n F x_{0j} \\ &+ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n C_0 d_{ij} (p_0 x_{ij} + \alpha y_{ij}) \end{aligned}$ <p>Costo fijo de los vehículos + Costo de combustible de los vehículos</p>	<p>El costo del consumo de combustible en una ruta es representado como la multiplicación del costo unitario de combustible C_0 por el consumo de combustible a lo largo de la ruta p_{ij} por la distancia recorrida de i a j d_{ij}. x_{ij} es una variable de decisión binaria que equivale a 1 si el arco $\{i, j\}$ existe.</p> <p>El consumo de combustible p_{ij} depende del peso del vehículo vacío p_o + la carga del vehículo como variable de decisión y_{ij}. Q Representa la capacidad del vehículo y p^* el peso del vehículo cargado.</p>	<p>1) Cada cliente debe ser visitado solo por un vehículo, 2) si un vehículo llega a un cliente debe salir también (restricción de flujo), 3) reducir la carga del vehículo cuando este visita a un cliente en la cantidad que demanda el cliente (restricción que prohíbe también la generación de subtours), 4) y una restricción de capacidad máxima del vehículo, que a su vez permite que la variable $y_{ij} = 0$ cuando $x_{ij} = 0$.</p> <p>Técnica de Solución: Simulated Annealing.</p>

Tabla 2.10: Comparación de modelos matemáticos del problema de ruteamiento de vehículos considerando efectos ambientales parte 3

Año	Autor	Tipo de problema	Consumo de combustible o volumen de emisiones contaminantes	Descripción	Restricciones
2011	Bektaş & Laporte	PRP	$F_{ij} \approx \left(KNV + \left(P_{ij}/\varepsilon + P_a \right) / n \right) U$ <p>(1)</p> <p>Donde:</p> $P_{ij} \approx \alpha_{ij}(w + f_{ij})d_{ij} + \beta v_{ij}^2 d_{ij}$ <p>(2)</p> $\alpha_{ij} = a + g \sin \theta_{ij} + g C_r \cos \theta_{ij}$ <p>(3)</p> <p>Función objetivo: ILP</p> $\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{(i,j) \in A} (C_f + e) \alpha_{ij} d_{ij} w x_{ij} + \\ & \sum_{(i,j) \in A} (C_f + e) \alpha_{ij} f_{ij} d_{ij} \end{aligned}$ <p>+</p>	<p>(1) Tasa de consumo de combustible del motor.</p> <p>(2) La primera parte de la ecuación representa el requerimiento de energía inducido por la carga del vehículo y la segunda parte el requerimiento de energía inducido por la velocidad.</p> <p>El vehículo viaja a una velocidad constante v_{ij} en un arco $\{i, j\}$ con distancia d_{ij} y ángulo de carretera $\theta = \theta_{ij}$ llevando un total de carga $M = w + f_{ij}$.</p> <p>w es el peso del vehículo vacío y f_{ij} es la carga llevada por el vehículo en el arco $\{i, j\}$. Los demás parámetros son: K factor de fricción del motor, N velocidad del</p>	<p>1) Una cantidad m de vehículos parten del depósito. 2) cada cliente es visitado exactamente una vez. 3) balance de flujo. 4) El total de carga de un vehículo no puede exceder su capacidad. 5) Restricciones de ventanas de tiempo. 6) El total de tiempo viajado por cada vehículo depende del último nodo visitado.</p> <p>Técnica de Solución: Cplex 12.1. Branch and cut.</p>

		$\sum_{(i,j) \in A} (C_f + e)d_{ij}\beta \left(\sum_{r \in A} (\bar{v}^r)^2 z_{ij}^r \right) + \sum_{j \in N_0} p s_j$ <p>Costo de la carga transportada en el vehículo + costo incurrido por variaciones en la velocidad + cantidad pagada a los conductores.</p> <p>z_{ij}^r es una variable binaria igual a 1 si un vehículo viaja a una velocidad promedio r en el arco $\{i, j\}$.</p>	<p>motor, V desplazamiento, P_{ij} es la fuerza total de tracción demandada en watts, ε es la eficiencia de transmisión del vehículo, P_a es la fuerza del motor asociada con pérdidas de funcionamiento y otros accesorios del vehículo, $n \approx 0.45$ es una medida de eficiencia para motores diesel y U es un valor que depende de la velocidad N.</p>	
--	--	---	--	--

Tabla 2.11; Comparación de modelos matemáticos del problema de ruteamiento de vehículos considerando efectos ambientales parte 4

Año	Autor	Tipo de problema	Consumo de combustible o volumen de emisiones contaminantes	Descripción	Restricciones
2011	Suzuki	TSPT W	<p>Efecto de la velocidad de acuerdo a la pendiente de la carretera:</p> $C_{ij} = (\alpha_0 + \alpha_1 V_{ij}) \gamma_{ij}$ <p>Efecto de la carga del vehículo:</p> $mpg = \beta_0 + \beta_1 L$ $\pi_{ij} = \frac{\beta_0 + \beta_1 \sum_{i \in y_{ij}} l_i}{\beta_0 + \beta_1 \mu}$ <p>Función objetivo:</p> $\text{Min} \sum_{i \in N \setminus \{n+1\}} \sum_{j \in N \setminus \{0; i\}} \frac{d_{ij}}{C_{ij} \pi_{ij}} x_{ij} + \sum_{i \in M \setminus \{0; n+1\}} (B_i - A_i) \frac{\rho}{60}$ <p>Donde:</p> <p>d_{ij} Distancia entre el cliente i y j. x_{ij} es una variable de decisión binaria que equivale a 1 si el arco $\{i, j\}$ existe.</p> <p>ρ es la cantidad promedio de combustible consumido por hora mientras un vehículo espera en los sitios de los clientes. B_i tiempo en que inicia la descarga del pedido al cliente i, A_i tiempo en que llega el vehículo al cliente i.</p>	<p>Tasa de consumo del vehículo en el arco $\{i, j\}$.</p> <p>Donde: V_{ij} velocidad;</p> <p>$\gamma_{ij} = 1$ para terreno plano, $\gamma_{ij} < 1$ para un gradiente positivo, $\gamma_{ij} > 1$ para un gradiente negativo</p> <p>l_j denota el peso de la carga a ser liberada por el cliente i, y $y_{ij} \subseteq N$ es el conjunto de clientes a ser visitados aún, cuando el vehículo está viajando en el arco $\{i, j\}$. μ es el promedio de carga del vehículo en la ruta.</p> <p>$\pi_{ij} = 1$ cuando la carga es μ, $\pi_{ij} > 1$ cuando es menor a μ, y $\pi_{ij} < 1$ cuando es mayor a μ</p> <p>$\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1, \rho, \mu$ y γ_{ij} son parámetros en el modelo.</p>	<p>1) Un vehículo ingresa y parte de cada nodo solo una vez.</p> <p>2) Restricciones de ventanas de tiempo de los clientes</p> <p>3) Características de los nodos de depósito.</p> <p>Técnica de solución: Compressed-annealing</p>

Tabla 2.12: Comparación de modelos matemáticos del problema de ruteamiento de vehículos considerando efectos ambientales parte 5

Año	Autor	Tipo de problema	Consumo de combustible o volumen de emisiones contaminantes	Descripción	Restricciones
2013	Pradinas, Oportus, & Parada	VRPBTW	P_{ij} $\approx \alpha_{ij}(w + f_{ij})d_{ij} + \beta v_{ij}^2 d_{ij}$ $\alpha_{ij} = a + g \sin \theta_{ij} + g C_r \cos \theta_{ij}$ <p>Función objetivo:</p> $\text{Min} \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=1}^v [\alpha_{ij} d_{ij} + f_{ijk}) + \beta v_{ij}^2 d_{ijk}]$	<p>Consumo de combustible Basado en Bektaş & Laporte.</p> <p>La función objetivo minimiza la cantidad de energía requerida por la ruta, considerando la distancia d_{ij}, la carga transportada por el vehículo f_{ijk} y la velocidad v_{ij} en cada arco $\{i, j\}$.</p> <p>Técnica de solución: Scatter search.</p>	<p>1) Cada entrega y retorno de mercancía de un cliente debe ser realizada por un solo vehículo. 2) el vehículo no puede exceder su capacidad. 3) restricciones de conservación de flujo. 4) restricciones de prioridad asignada a los clientes para el recorrido de cada vehículo. 5) restricciones de ventanas de tiempo. 6) Restricciones de flujo de la carga del vehículo de acuerdo a la demanda.</p>

Calderón, L. A. F. (2016). *Algoritmo bi-objetivo para el problema de enrutamiento óptimo de vehículos, considerando flota heterogénea y efectos ambientales* (Universidad Tecnológica de Pereira. Facultad de Ingeniería Industrial. Maestría en Investigación Operativa y Estadística). Toro, O., Eliana, M., Escobar, Z., Antonio, H., & Granada, E. (2016). Literature review on the vehicle routing problem in the green transportation context. *Luna Azul*, (42), 362-387.

2.7 BALANCEO DE RUTAS - *VEHICLE ROUTING PROBLEMS WITH LOAD*

BALANCING O VRPRB

El entorno empresarial global y agresivo ha reconocido la importancia de un servicio rápido y eficiente hacia los clientes en las últimas décadas. Hay una necesidad de un flujo ininterrumpido de bienes y materiales entre entidades de la cadena de suministro (Chan y Kumar, 2007). El servicio y el nivel de rendimiento de la red de la cadena de suministro puede ser fácilmente mejorado por un enrutamiento equilibrado. Ya que un enrutamiento desequilibrado puede conducir a una infrautilización o sobreutilización de activos e instalaciones y puede deteriorar aún más el servicio al cliente. El gerente de logística necesita un sistema de apoyo de decisiones (DSS) para poder tomar las decisiones operativas de enrutamiento equilibrado.

Los costes totales de enrutamiento conducen en muchos casos a soluciones en las que sólo un subconjunto de vehículos es utilizado, es decir, el equilibrio de carga es deficiente. Eso es la capacidad de los vehículos caros y altamente cualificados se pierde, la utilización de los recursos es mala, como los vehículos altamente cualificados pueden ser caros no sólo en términos de costos de enrutamiento, sino también en términos de adquisición y mantenimiento, esta solución no es satisfactoria.

Considere el siguiente ejemplo. Una empresa de servicios realiza trabajos de reparación en un taller de reparación central, así como en los sitios de los clientes. En este caso, los sitios de los clientes son nodos. Dependiendo de la carga de trabajo, será posible que un solo técnico sea capaz de servir todos los trabajos en los sitios de los clientes dentro de su tiempo de trabajo mientras que sus colegas realizan los trabajos en el taller de reparación central. En términos de encaminamiento total de costes, esto podría ser una buena solución. Sin embargo, en términos de satisfacción de los empleados, tal solución desequilibrada puede ser problemática. Además, si sólo un cliente requiere la habilidad más alta, entonces sólo el técnico que ofrece la habilidad más alta puede llevar fuera del viaje de ida y vuelta. Es probable que en su gira, el técnico tendrá que cumplir con los puestos de trabajo que requeriría una habilidad más baja. Mientras tanto, su experiencia estaría ausente en el taller de reparación central, es decir, la solución es mala en términos de utilización de recursos.

Surgen una serie de contextos de aplicación:

1. Los problemas de entrega de productos perecederos que tienen restricciones de temperatura para evitar el deterioro que a menudo se traducen en la duración de la ruta o las restricciones de longitud de la ruta. Por ejemplo, Gorr, Johnson y Roehrig (2001) informa que las comidas calientes se entregan a personas mayores confinadas en su hogar a través de programas como *Meals on Wheels* debe ser al menos a 140F. En su estudio, el requisito de temperatura para la última comida entregada en una ruta se traduce en una duración total de la ruta de 45 minutos. Por lo tanto, las decisiones de dónde ubicar la preparación de la comida cocinas y cómo secuenciar clientes en múltiples rutas de parada deben hacerse simultáneamente para garantizar que las comidas entregadas cumplen con la temperatura 140 grados Fahrenheit de requisito.
2. Problemas de entrega críticos por el tiempo, tales como expresar la entrega del paquete, tiene restricciones de tiempo límite que limitan la duración o la duración de las rutas. Por ejemplo, www.barnesandnoble.com puede tomar pedidos a mas tardar a las 11:00 a.m. de lunes a viernes de los clientes de Manhattan y entrega libros, CD y DVD antes de las 7 p.m. a empresas y residencias (Paltrow 2003). A menudo los problemas de entrega de tiempo crítico implican sanciones si la fecha límite no se cumple. Por ejemplo, FedEx ofrece una garantía de devolución de dinero por sus servicios; en el caso de que el paquete se entregue después de un compromiso publicado tiempo, FedEx reembolsará o acreditará los cargos del transporte.
3. Webb (1968) y Christofides y Eilon (1969) fueron entre los primeros en reconocer el error introducido en el modelado de la ubicación por la representación de ida y vuelta de los costos de entrega. A mediados de la década de 1970, modelos, procedimientos de solución y aplicaciones de LRP estaban empezando a aparecer en la literatura. Laporte (1988) resume la literatura publicada antes de 1988. Más recientemente, Min, Jayaraman y Srivastava (1998) desarrollan y usan una taxonomía jerárquica y esquema de clasificación basado en las características del problema y metodología de solución para revisar la literatura de LRP. La mayoría de las investigaciones hasta la fecha se han centrado en el método heurístico porque los LRP combinan dos problemas NP-hard. La heurística generalmente descompone el problema en sus tres componentes: ubicación de

la instalación, asignación de clientes a las instalaciones, y al enrutamiento de vehículos, y a resolver una serie de problemas conocidos como p-mediana, ubicación-asignación y enrutamiento del vehículo.

Esta variación incluye un objetivo que busca el equilibrio entre la carga de trabajo de los vehículos. Según (Jozefowicz et al., 2009) para poder definir el objetivo de equilibrio se necesita definir primero qué se entiende por la carga de trabajo. La carga de trabajo se puede definir en términos de:

- Número de clientes a visitar
- Cantidad de productos entregados
- Longitud de la ruta
- Tiempo del recorrido

Este tipo de problema surge debido a que la mayoría de enfoques busca minimizar los costos a expensas del equilibrio de carga entre los empleados ya que al tratar de minimizar la varianza entre las rutas o cargas, los costos se aumentan. En la mayoría de la literatura encontrada los modelos presentados coinciden en los siguientes supuestos (Lee & Ueng, 1999):

- Existe relación lineal entre el tiempo de viaje y la distancia
- Los objetivos son tomar el camino más corto de viaje y asignar la mejor carga
- Se conoce la demanda de cada nodo y debe ser servida por un solo vehículo
- Todos los nodos deben ser servidos sin restricciones de tiempo
- En cada punto de demanda se realiza sólo descarga
- Cada vehículo hace un solo viaje (ida y vuelta)

El primer modelo de programación entera mixta en trabajar el tema de equilibrio de carga en las rutas de los VRP fue en (Fisher & Jaikumar 1981). En este modelo la carga de trabajo se entiende como la longitud de la ruta. Los dos objetivos a tener en cuenta son:

- Minimizar la distancia total recorrida por los vehículos
- Minimizar la diferencia entre la ruta más larga y la ruta más corta

En (Tzong-Ru & Ji-Hwua, 1999) se presenta un modelo de programación entera que busca minimizar la distancia total y equilibrar la carga de trabajo de los empleados persiguiendo que la distancia recorrida por cada vehículo sea la misma. En (Lee y Ueng 1999), los autores equilibran el tiempo para cada viaje, expresándolo como suma de las diferencias entre la longitud de cada carretera y la longitud de la carretera más corta. El balanceo es también un objetivo para Ribeiro y Loureno (2001). En su artículo se mide el balance por la desviación estándar de la carga de las carreteras, que consiste en el número de clientes visitados. Corberan et al. (2002) trabajan en minimizar el tiempo empleado en un autobús, que también se puede ver como un tipo de balanceo de rutas.

En (Li & Fu, 2002), se desarrolla un modelo de ruteo para buses escolares donde los objetivos son minimizar el número total de vehículos requeridos, el tiempo total de viaje y el tiempo total de viaje de los estudiantes que toman los buses hacia todos los puntos de recogida, el cual, según encuestas realizadas al colegio y a los padres, es el más costoso. En varias investigaciones (Jozefowicz et al., 2005, 2007, 2009) han estudiado el Problema de Ruteo de Vehículos con Balance de carga siempre contemplando el balance como la menor diferencia entre la distancia recorrida por cada vehículo. Las técnicas empleados por estos autores son algoritmos genéticos, híbrido de algoritmo genético con búsqueda local y algoritmos evolutivos. En dos de los artículos que contemplan el objetivo de balance de carga, se presenta la meta-heurística de Búsqueda Tabú como enfoque de solución (Dharmapriya, et al., 2010) (Lin & Kwok, 2005). En (Ombuki-Berman & Hanshar, 2009) se presenta un problema de recolección de residuos que contempla los objetivos de minimizar el número total de vehículos utilizados, reducir al mínimo la distancia recorrida por los vehículos y equilibrar la carga de trabajo entre los vehículos entendida como el número de clientes a visitar. En (Wen, et al., 2010) se estudia un Problema de Ruteo de Vehículos multi-periodo y dinámico el cual contempla el objetivo de balance de carga como el balance entre la distancia recorrida por cada vehículo cada día en un horizonte de planeación determinado. Los artículos de (Baños et al., 2013) y (Kritikos & Loannou, 2010) estudian las variantes del Problema de Ruteo de Vehículos con ventanas de tiempo incluyendo como objetivo de balance de carga en la distancia recorrida por cada vehículo. (Lepesqueur, 2014).

2.7.1 Balance de carga en el problema de ruteo (Geraldine, 2019)

Los VRP han trascendido más allá de la búsqueda de un único objetivo como lo expuesto en el punto anterior, es por esto que en la última década los investigadores han decidido centrar su atención en cómo obtener mayores beneficios para la organización; en el ámbito social se ha descubierto que la asignación equitativa de la carga laboral puede mejorar la aceptación de los planes operativos entre los conductores, su estado anímico y la calidad del servicio proporcionado al cliente (Liu et al., 2006). Hay que mencionar además que equilibrar la utilización de la capacidad de los vehículos puede liberar recursos de cuellos de botella para el crecimiento futuro de las operaciones sin la necesidad de una inversión adicional (Apte & Mason, 2006).

En vista de lo anterior, en la última década múltiples autores han decidido lanzarse a explorar el campo del *Vehicle routing problem with route balancing* (VRPRB), en donde se ha considerado esta variable como un problema monobjetivo en donde la equidad es el objetivo o se modela como una restricción, y como un problema bi-objetivo, en donde se considera como el objetivo primario o el secundario según el interés del autor.

Dentro de este contexto, gran parte de la discusión se ha centrado en cuál es la función de equidad adecuada para modelar el problema, ya que hasta el momento existen seis medidas y la decisión acerca de cuál implementar puede afectar en alto nivel el resultado obtenido, sobre todo alcanzando una variación significativa en los modelos bi-objetivos al momento de encontrar el frente de Pareto (Matl, Hartl, & Vidal, 2017).

Es necesario aclarar que las funciones de equidad que se comentaran a continuación (Matl et al., 2016) consideran la duración del recorrido como la métrica de equidad, según la distancia o la duración del mismo, ya que existen mayor número de documentos en los cuales se considera así y menos en donde se considera la carga de trabajo en términos de la demanda atendida por recorrido.

2.7.1.1 MIN-MAX: $\max x_i$

Siendo la medida de desigualdad más simple que existe, el Min Max consiste en una función objetivo que pretende minimizar la peor ruta, ósea la ruta con mayor recorrido.

2.7.1.2 MIN- MAX Lexicográfico:

Este es una extensión del anterior, en donde se plantea que en lugar de solo minimizar la peor ruta, también se minimiza la segunda peor (sujeto a la minimización de la primera), la tercera peor se minimiza (sujeto a la minimización de las dos anteriores), y así sucesivamente.

2.7.1.3 Rango: $\max x_i - \min x_i$

Consiste en una función objetivo que pretende minimizar la diferencia entre la ruta más larga y la ruta más corta, en esta se puede encontrar mayor información que las dos anteriores al ser una medida de dispersión.

2.7.1.4 Desviación media absoluta: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$

Se define como la suma de la diferencia absoluta medida entre la distancia de cada resultado y el promedio de las distancia. A diferencia del rango, es directamente afectado por cada resultado en la distribución, en lugar de los extremos

2.7.1.5 Desviación estándar: $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

Es la función en la cual se hace uso de la medida estadística de dispersión más conocida. Satisfaciendo muchas de las desventajas que se producen con los anteriores, su mayor desventaja es que computacionalmente el problema se complejiza.

2.7.1.6 Coeficiente de Gini: $\frac{1}{2n^2 x} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|$

Es un índice que asume valores entre 0 y 1, en el cual los valores más bajos corresponden a una desigualdad más baja, de igual manera que el anterior su desventaja es la complejidad computacional.

2.8 EPSILON-CONSTRAINT METHOD (Ramon, Eliana, & Antonio, 2015)

Se tiene un problema como el siguiente:

$$\min (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \quad (2.37)$$

Sujeto a:

$$x \in S \quad (2.38)$$

Donde en las ecuaciones (2.37) y (2.38), x es el vector de las variables decisión, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$ donde p indica el número de funciones objetivo y S la región factible. Un procedimiento que supera algunos de los problemas de convexidad de la técnica de suma ponderada es el método *Epsilon* (ϵ) - *constraint*. Este implica minimizar una Función objetivo primaria (T), y la expresión de los demás objetivos en forma de restricciones de desigualdad enunciados en las ecuaciones (2.39) a (2.41).

$$\min F_1(x) \quad (2.39)$$

Sujeto a

$$F_j(U) \leq \epsilon_j; i \neq j \quad (2.40)$$

$$x \in S \quad (2.41)$$

La figura 2.5 muestra en dos dimensiones la representación del método ϵ –constraint para un problema con dos funciones objetivo.

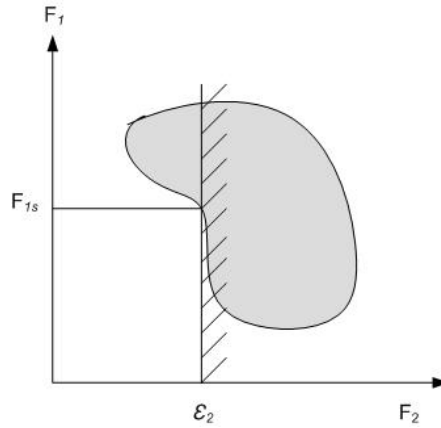


Figura 2.6 Representación geométrica del método ϵ -constraint

Este enfoque es capaz de identificar una serie de soluciones no inferiores a un límite no convexo que no se pueden obtener utilizando la técnica de suma ponderada, por ejemplo, en el punto solución $F_1 = F_{1s}$ y $F_2 = \epsilon_2$. Un problema con este método requiere una selección adecuada de ϵ para asegurar una solución factible. Una desventaja adicional de este enfoque es que el uso de restricciones duras rara vez es suficiente para expresar los verdaderos objetivos de diseño. Por variación paramétrica en el RHS de las funciones objetivo restringidas (ϵ_i) las soluciones eficientes del problema son obtenidas.

El método ε –constraint tiene varias ventajas sobre el método de ponderación:

1. Para los problemas lineales, el método de ponderación se aplica a la región factible original y los resultados a una solución de esquina (solución extrema), generando como soluciones eficientes solamente las externas. Por el contrario, el método ε –constraint altera la región factible original y es capaz de producir soluciones eficaces no extremas. Como consecuencia de ello, con el método de ponderación se podrán encontrar de una gran cantidad de soluciones que son redundantes en el sentido de que no puede haber una gran cantidad de combinaciones de pesos que resulten en la misma solución extrema eficiente. Por otro lado, con la dirección ε –constraint podemos explotar casi cada alternativa para producir una solución eficiente diferente, obteniendo así una más rica representación del conjunto de soluciones eficientes.
2. El método de ponderación no puede producir soluciones eficientes no compatibles en un problema multiobjetivo y programación entera mixta mientras que el método ε –constraint no sufre de este obstáculo.
3. En el método de ponderación la escala de las funciones objetivo tiene una fuerte influencia en el resultado obtenido. Por lo tanto, es necesario ampliar las funciones objetivas a una escala común antes de formar la suma ponderada. En el método de ε –constraint esto no es necesario.

2.9 OPTIMIZACIÓN MULTIOBJETIVO

La optimización multi-objetivo es un proceso computacional que procesa simultáneamente dos ó más objetivos en conflicto sujeto a un conjunto de restricciones. Para problemas no triviales multi-objetivo, no existe una única solución que optimice todos los objetivos. En lugar de ello, hay un conjunto de soluciones, cuyo comportamiento reflejan el mejoramiento de un objetivo mientras los otros empeoran. Estas soluciones se denominan soluciones óptimas de Pareto o Pareto eficientes. Encontrar un conjunto representativo de este tipo de soluciones, y la cuantificación de las compensaciones en la satisfacción de los diferentes objetivos, es el objetivo que se persigue cuando se resuelve un problema de optimización multi-objetivo .

En la optimización multi-objetivo, el objetivo principal es el de producir soluciones que representan los mejores compromisos posibles entre los diferentes objetivos (posiblemente en conflicto).

Por lo tanto, con el fin de emplear un concepto adecuado de optimalidad, se define el óptimo de Pareto:

Sea Ω un conjunto no vacío de soluciones factibles y $\Psi(\cdot)$ un vector de funciones objetivo. Una solución factible $x^* \in \Omega$ es llamada solución Pareto óptima para un problema de optimización multi-objetivo, si y sólo si no existe ningún $x \in \Omega$ tal que $\Psi(x) < \Psi(x^*)$. La relación $(\cdot < \cdot)$ denota que cada coordenada del primer argumento es menor o igual que la correspondiente coordenada del segundo argumento, y al menos una coordenada del primer argumento es estrictamente menor que la coordenada correspondiente del segundo.

Para resolver los problemas multi-objetivo, se pueden adoptar valores para los parámetros del problema, cuya solución conduce a una solución Pareto-óptima. Para ampliar la discusión de las metodologías multi-objetivo se puede consultar en Miettinen (1999), Ehrgott and Gandibleux (2002), Marler (2009). En la metodología q restricciones, un objetivo es seleccionado para ser optimizado, mientras que los otros objetivos se convierten en restricciones, mediante la imposición de límites superiores.

En Cohon and Marks [1975] indican que el método q -restricciones puede ser derivado de las condiciones de optimalidad de Kuhn-Tucker para problemas de optimización multi-objetivo. Una variación sistemática de los parámetros q_k puede conducir a soluciones Pareto óptimas (Marler, 2009). Si existe una solución q -restricción, la formulación es débilmente Pareto óptimo, como se plantea en Miettinen (1999). Sin embargo si la solución es única, entonces es Pareto-óptima.

Para más de dos objetivos la formulación puede conducir a soluciones infactibles, para algunas combinaciones de valores. Sin embargo, para dos objetivos. El método puede conducir a soluciones Pareto-óptima con variaciones del q .

Para generar los puntos del frente de Pareto, primero se optimiza con respecto a cada objetivo de forma individual y considerando las restricciones originales del modelo. Esto produce los valores mínimos y máximos de cada objetivo contenidos en el frente de Pareto. Los puntos intermedios del frente se obtienen con pasos discretos, variando epsilon dentro del rango mínimo y máximo argumento.

3.1 MODELO OVRP

3.1.1 EXPLICACIÓN DE MODELO MATEMÁTICO OVRP

Para este problema se tienen las siguientes consideraciones las cuales hacen una delimitación del problema:

1. Se cuenta con un único depósito, de donde salen los vehículos pero no deberán volver.
2. La capacidad del depósito es infinita o suficiente para atender la demanda del problema.
3. Todos los vehículos tienen una capacidad de carga limitada y uniforme
4. El conjunto de clientes i tienen una demanda conocida.
6. Cada cliente será visitado una única vez con cualquiera de los vehículos.

3.1.2 CONSTRUCCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

El OVRP se formula como un problema lineal entero mixto y se define en los siguientes conjuntos y ecuaciones: Se tiene que el problema puede representarse como un grafo completo de la forma $G = (V, A)$, donde V representa un conjunto con la totalidad de los vértices del grafo (depósitos y clientes), y A el conjunto de arcos que conectan los clientes y el depósito. Se tiene el conjunto $J = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, contiene los nodos de clientes (el depósito tendrá siempre asignado el nodo cero).

Definamos

$I =$ conjunto de arcos del depósito a los clientes

$J =$ conjunto de arcos entre los clientes

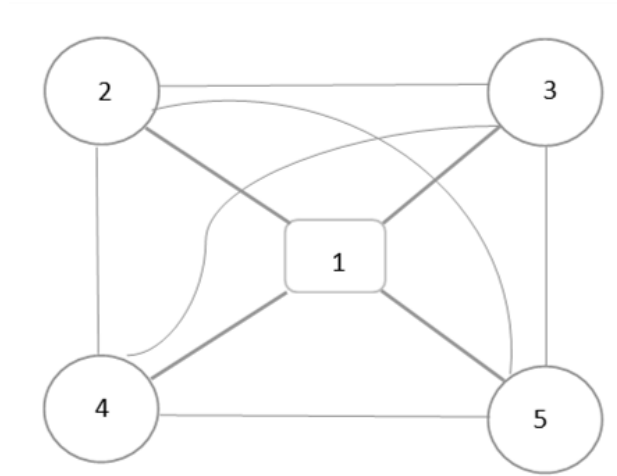


Figura 3.1: Red de arcos. Fuente el autor.

En la figura 3.1 la red los arcos de color rojo corresponden al conjunto J y los arcos de color verde corresponden al conjunto I , en el caso de estudio al igual que en el ejemplo solo se cuenta con un depósito.

$$V = I \cup J \quad (3.1)$$

El conjunto V de la ecuación (3.1) corresponde a todos los arcos presentes en la red, es decir los que permite la conexión entre nodos y los que conectan el depósito con cada nodo.

Variables de decisión:

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{cuando el arco } i \text{ a } j \text{ es recorrido por un vehiculo} \\ 0 & \text{cuando el arco } i \text{ a } j \text{ no es recorrido por un vehiculo} \end{cases}$$

$$L_{ij} = \text{Acumulado de carga en el nodo } i \text{ del vehículo } j$$

$$I_{ij} = \text{carga en el nodo } i \text{ del vehículo } j$$

Parámetros:

$$C_{ij} = \text{matriz de distancias entre nodos y entre depósito y nodos}$$

$$D_j = \text{demanda de cada nodo}$$

Q = capacidad del vehículo

C_x = coordenadas del cliente y depósito en el eje x

C_y = coordenadas del cliente y el depósito en el eje y

3.1.3 MODELADO MATEMÁTICO (Ocampo, 2016)

Función objetivo:

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} C_{ij} S_{ij} \quad (3.2)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i \in V} S_{ij} = 1 \quad \text{para } j \in J \text{ y todo } i \neq j \quad (3.3)$$

$$\sum_{k \in J} S_{jk} \leq \sum_{i \in V} S_{ij} \quad \text{para todo } j \in J \text{ y todo } j \neq k \text{ y } i \neq j \quad (3.4)$$

$$S_{ij} + S_{ji} \leq 1 \quad \text{para todo } i \in V \text{ y } j \in V \quad (3.5)$$

$$L_{ij} \leq Q S_{ij} \quad \text{para todo } i \in V \text{ y } j \in V \quad (3.6)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} S_{ij} \geq \frac{\sum_{i \in J} D_j}{Q} \quad (3.7)$$

$$\sum_{i \in V} S_{ij} \geq \sum_{k \in J} S_{jk} \quad \text{para todo } j \in J \quad (3.8)$$

$$\sum_{i \in V} I_{ij} = \sum_{k \in V} I_{jk} + D_j \quad \text{para todo } j \in J, \text{ todo } i \neq j \text{ y } k \neq j \quad (3.9)$$

$$S_{ij} \text{ binaria} \quad (3.10)$$

$$L_{ij} \geq 0 \text{ y } L_{ij} \leq Q \quad (3.11)$$

La ecuación (3.2) corresponde a la función objetivo que calcula la distancia total recorrida por todas las rutas, estableciendo esta distancia como el costo de transportar se entre nodos.

Las ecuaciones en (3.3) a (3.9) definen las restricciones de la siguiente forma:

(3.3). Cada nodo tendrá un único arco de llegada.

(3.4). Permite asegurar que un nodo tendrá el mismo arco de entrada como de salida.

(3.5). Esta restricción evita la duplicación de arcos e indica el sentido del mismo.

(3.6). Con esta restricción se garantiza el balance de flujos de demanda en los vehículos. Se tiene la variable L_{ij} como la cantidad de carga que lleva un vehículo. Esta restricción indica que el flujo de carga que sale de un nodo es igual al flujo que llega más la demanda del mismo nodo.

(3.7). Se garantiza que el número de rutas es suficiente para atender toda la demanda de los clientes. Esto se consigue haciendo que la sumatoria de todos los arcos que salen del depósito sean igual (o eventualmente menor si la demanda puede ser atendida con menos vehículos) al cociente de la demanda total con la capacidad de los vehículos.

(3.8). Garantiza la continuidad de la ruta.

(3.9). Están son las encargadas del balance de las rutas, es decir garantizan que lo que entre a un nodo sea igual a lo que sale más la demanda o lo que se quedó en ese nodo.

(3.10). Establece la variable S_{ij} como binaria

(3.11). Genera un límite superior e inferior para L_{ij}

EJEMPLO: dados los siguientes datos presentados en la figura 3.2 la que contiene un depósito y 4 nodos de clientes con sus respectivas coordenadas y demanda

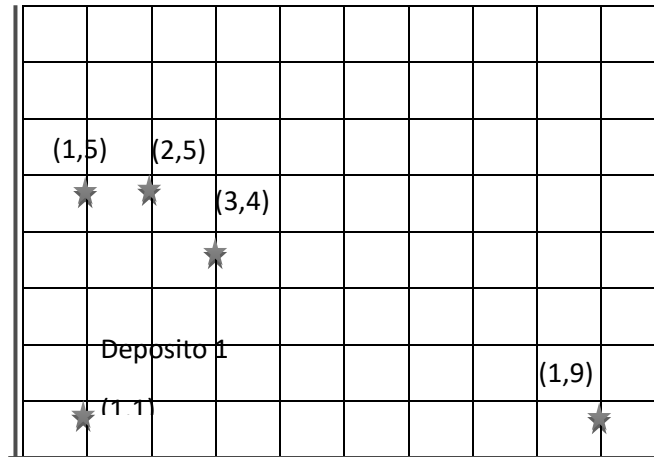


Figura 3.2: Problema ejemplo OVRP. Fuente el autor.

Se sabe además que la demanda del nodo dos es de 10 unidades, del nodo 3 de 10 unidades, del nodo 4 de 5 unidades y del nodo 5 de 12 unidades.

La capacidad del camión es de 20 unidades. En la tabla 3.1 se presenta la demanda de cada uno de los nodos.

Tabla 3.1: Demandas

Nodo	Demanda (unidades)
2	10
3	10
4	5
5	12

En la figura 3.2 encontramos un depósito y cuatro nodos que corresponden a los clientes. Para iniciar se debe calcular la matriz C_{ij} con base en la fórmula de distancia euclidiana de la siguiente manera:

Las ecuaciones (3.12) a (3.15) muestran la distancia Euclidiana entre el depósito 1 y los demás nodos:

$$C_{12} = \sqrt{(1-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4 \quad (3.12)$$

$$C_{13} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \quad (3.13)$$

$$C_{14} = \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \quad (3.14)$$

$$C_{15} = \sqrt{(1-1)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{0^2 + 8^2} = \sqrt{64}=8 \quad (3.15)$$

Las ecuaciones (3.16) a (3.19) muestran la distancia entre el nodo 2 y los demás nodos:

$$C_{21} = C_{12} = 4 \quad (3.16)$$

$$C_{23} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{2^2 + -1^2} = \sqrt{5} \quad (3.17)$$

$$C_{24} = \sqrt{(2-1)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1}=1 \quad (3.18)$$

$$C_{25} = \sqrt{(1-1)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4 \quad (3.19)$$

Las ecuaciones (3.20) a (3.23) muestran la distancia entre el nodo 3 y los demás nodos:

$$C_{31} = C_{13} = \sqrt{13} \quad (3.20)$$

$$C_{32} = C_{23} = \sqrt{5} \quad (3.21)$$

$$C_{34} = \sqrt{(2-3)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{-1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad (3.22)$$

$$C_{35} = \sqrt{(1-3)^2 + (9-4)^2} = \sqrt{-2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \quad (3.23)$$

Las ecuaciones (3.24) a (3.27) muestran la distancia entre el nodo 4 y los demás nodos:

$$C_{41} = C_{14} = \sqrt{17} \quad (3.24)$$

$$C_{42} = C_{24} = 1 \quad (3.25)$$

$$C_{43} = C_{34} = \sqrt{2} \quad (3.26)$$

$$C_{45} = \sqrt{(1-2)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{-1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \quad (3.27)$$

Las ecuaciones (3.28) a (3.31) muestran la distancia entre el nodo 5 y los demás nodos:

$$C_{51} = C_{15} = 8 \quad (3.28)$$

$$C_{52} = C_{25} = 4 \quad (3.29)$$

$$C_{53} = C_{35} = \sqrt{29} \quad (3.30)$$

$$C_{54} = C_{45} = \sqrt{17} \quad (3.31)$$

Con los anteriores datos se construye la matriz de distancias euclidiana mostrada en la *Tabla 3.2*:

Tabla 3.2: Matriz de distancias euclidiana

$C_{IJ} =$		1	2	3	4	5
	1	0	4	$\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$	8
	2	4	0	$\sqrt{5}$	1	4
	3	$\sqrt{13}$	$\sqrt{5}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{29}$
	4	$\sqrt{17}$	1	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{17}$
	5	8	4	$\sqrt{29}$	$\sqrt{17}$	0

Con los datos se puede construir el modelo que pretende resolver el problema de transporte y realizar el balanceo de ruta, es de notar que como en el capítulo anterior ya se desarrolló el modelo en esta ocasión solo se explicaran las restricciones adicionales.

Ecuación (3.32): Minimizar costo de ruta:

$$\begin{aligned} \text{Min} Z = & C_{11}S_{11} + C_{12}S_{12} + C_{13}S_{13} + C_{14}S_{14} + C_{15}S_{15} + C_{21}S_{21} + C_{22}S_{22} + C_{23}S_{23} + \\ & C_{24}S_{24} + \dots + C_{54}S_{54} + C_{55}S_{55} \end{aligned} \quad (3.32)$$

En la función objetivo se calcula la distancia total recorrida por todas las rutas, estableciendo en esta distancia como el costo de transportar se entre nodos. La función objetivo adicional al costo la distancia entre nodos cuyo arco se active o se use al generar la ruta.

RESTRICCIONES TIPO 1: estas restricciones corresponden a la ecuación (3.3) presentadas en el modelo matemático.

En la ecuación (3.33) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 1 para $j=2$

$$S_{12} + S_{32} + S_{42} + S_{52} = 1 \quad (3.33)$$

Se generan en total cuatro restricciones que corresponden a los cuatro nodos de clientes, estas restricciones tienen como propósito asegurar que a cada cliente llegue exactamente una ruta.

Si se activa el arco S_{12} es decir $S_{12} = 1$ automáticamente los demás arcos no se pueden activar es decir (ecuación (3.34)):

$$S_{32} = S_{42} = S_{52} = 0 \quad (3.34)$$

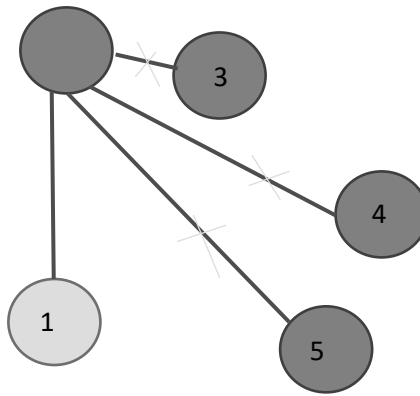


Figura 3.3: Funcionamiento restricciones tipo 1. Fuente el autor.

Para el nodo 1 no se construye restricción debido a que se trata del depósito. En la figura 3.3 se ilustra el modelamiento de estas restricciones.

RESTRICCIONES TIPO 2: estas restricciones corresponden a la ecuación (3.4) presentadas en el modelo matemático.

En la ecuación (3.35) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 2 para $j=2$

$$S_{22} + S_{23} + S_{24} + S_{25} \leq S_{12} + S_{22} + S_{32} + S_{42} + S_{52} \quad (3.35)$$

En la ecuación 3.36 se presenta un ejemplo de las restricción tipo 2 para $j=3$

$$S_{32} + S_{33} + S_{34} + S_{35} \leq S_{13} + S_{23} + S_{33} + S_{43} + S_{53} \quad (3.36)$$

En total se obtienen cuatro restricciones que corresponden al conjunto de clientes. Estas restricciones garantizan que cuando una ruta llegue a un nodo salga de ese mismo nodo.

Si paso del nodo 2 al 3 es decir S_{23} , en el otro lado de la restricción sera necesario que mínimo se active un arco indicando que para poder salir del nodo 2 será necesario que de cualquier otro nodo se haya llegado al nodo indicado por ejemplo $S_{12} = 1$ lo cual nos daría un grafo mostrado en la figura 3.4.

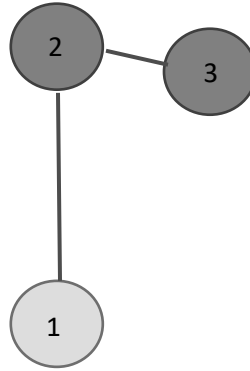


Figura 3.4: funcionamiento restricciones tipo 2. Fuente el autor.

RESTRICCIONES TIPO 3: estas restricciones corresponden a la ecuación (3.5) presentadas en el modelo matemático.

En la ecuación (3.37) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 3 para $i=1$ y $j=1$

$$S_{11} + S_{11} \leq 1 \quad (3.37)$$

En la ecuación (3.38) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 3 para $i=1$ y $j=2$

$$S_{12} + S_{21} \leq 1 \quad (3.38)$$

En la ecuación (3.39) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 3 para $i=1$ y $j=3$

$$S_{13} + S_{31} \leq 1 \quad (3.39)$$

En la ecuación (3.40) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 3 para $i=1$ y $j=4$

$$S_{14} + S_{41} \leq 1 \quad (3.40)$$

En la ecuación (3.41) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 3 para $i=1$ y $j=5$

$$S_{15} + S_{51} \leq 1 \quad (3.41)$$

Se generan 5 restricciones por cada valor de i y como en este caso $i \in V$ y $V=1...5$, se obtendrán 25 restricciones de este tipo en total. Esta restricción tiene como objetivo evitar la duplicación de datos es decir que si se activa el arco S_{12} el arco S_{21} deba tomar el valor de cero.

RESTRICCIONES TIPO 4: estas restricciones corresponden a la ecuación (3.6) presentadas en el modelo matemático.

En la ecuación (3.42) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 4 para $i=1$ y $j=1$

$$L_{11} \leq 20S_{11} \quad (3.42)$$

En la ecuación (3.43) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 4 para $i=1$ y $j=2$

$$L_{12} \leq 20S_{12} \quad (3.43)$$

En la ecuación (3.44) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 4 para $i=1$ y $j=3$

$$L_{13} \leq 20S_{13} \quad (3.44)$$

En la ecuación (3.45) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 4 para $i=1$ y $j=4$

$$L_{14} \leq 20S_{14} \quad (3.45)$$

En la ecuación (3.46) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 4 para $i=1$ y $j=5$

$$L_{15} \leq 20S_{15} \quad (3.46)$$

Se generan cinco restricciones para cada valor de i como en este caso $j \in V$ y $V = 1 \dots 5$ se obtendrán 25 restricciones. Estas restricciones buscan limitar el flujo entre nodos de acuerdo a la capacidad del vehículo, es decir que la que sea transportará no sea superior a 20 unidades que es en este caso la capacidad del vehículo. Esta restricción garantiza la factibilidad de la ruta.

El máximo valor que puede tomar L en este caso es 20 es decir la máxima carga o con lo que puede salir un vehículo es con 20 unidades.

Para ejemplo se tienen las ecuaciones (3.47) y (3.48):

$$20 \leq 20S_{12} \quad (3.47)$$

$$20 \leq 20 * 1 \quad (3.48)$$

Apenas llega al nodo 2, L_{23} sería igual a 10 por tanto (ecuación (3.49) y (3.50)) :

$$L_{23} \leq 20S_{23} \quad (3.49)$$

$$10 \leq 20 * 1 \quad (3.50)$$

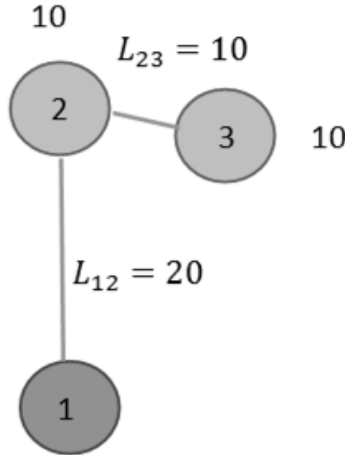


Figura 3.5 : Funcionamiento restricciones tipo 4. Fuente el autor.

La figura 3.5 ejemplifica el modelamiento de las restricciones tipo 4.

RESTRICCIONES TIPO 5: estas restricciones corresponden a la ecuación (3.7) presentadas en el modelo matemático.

En las ecuaciones (3.51) a (3.54) se presentan las restricciones tipo 5.

$$S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_{15} \geq \frac{D_2 + D_3 + D_4 + D_5}{20} \quad (3.51)$$

$$S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_{15} \geq \frac{10+10+5+12}{20} \quad (3.52)$$

$$S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_{15} \geq \frac{37}{20} \quad (3.53)$$

$$S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_{15} \geq 1,85 \quad (3.54)$$

En total se tiene una restricción, esta garantiza que el número de rutas sea suficiente para atender la demanda, es decir que del depósito salga el número de rutas necesario mínimo para que la demanda total del grafo se satisfaga, en este caso mínimo se necesitan 1,85 rutas es decir 2 por tanto del nodo uno deben salir mínimo 2 rutas y por tanto dos arcos como mínimo que inicien en 1 se deben activar.

RESTRICCIONES TIPO 6: estas restricciones corresponden a la ecuación (3.8) presentadas en el modelo matemático.

En la ecuación (3.55) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 6 para $j=2$

$$S_{12} + S_{22} + S_{32} + S_{42} + S_{52} \geq S_{21} + S_{22} + S_{23} + S_{24} + S_{25} \quad (3.55)$$

En la ecuación (3.56) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 6 para $j=3$

$$S_{13} + S_{23} + S_{33} + S_{43} + S_{53} \geq S_{31} + S_{32} + S_{33} + S_{34} + S_{35} \quad (3.56)$$

Debido a que se tienen valores de j de 2...5 se construyen cuatro restricciones en total. Este tipo de restricción garantiza la continuidad de la ruta. Es decir si llegamos desde 1 al nodo 2 de ahí debe salir la ruta y continuar su recorrido por ejemplo a 3. Sin embargo como el vehículo puede terminar su ruta en un nodo, la ruta puede llegar pero no salir por ello la restricción es de mayor igual.

RESTRICCIONES TIPO 7: estas restricciones corresponden a la ecuación (3.9) presentadas en el modelo matemático.

En la ecuación (3.57) se presenta un ejemplo de las restricción tipo 6 para $j=1$

$$I_{21} + I_{31} + I_{41} + I_{51} = I_{12} + I_{13} + I_{14} + I_{15} + D_1 \quad (3.57)$$

Se generan en total 5 restricciones. Estas son las encargadas del balance de las rutas, es decir garantizan que lo que entre a un nodo sea igual a lo que sale más la demanda o lo que se quedó en ese nodo.

En total para un grafo de un depósito y cuatro clientes se obtienen 68 restricciones evidencian la complejidad del modelo y el crecimiento de la cantidad de restricciones al aumentar el tamaño del problema debido a que cinco de los seis tipos de restricciones dependen del número de clientes.

3.2 FUNCIÓN OBJETIVO ALTERNATIVA “MINIMIZAR CONSUMO DE COMBUSTIBLE”

El problema también ha sido denominado *Consumption vehicle routing problem* (FCVRP) (del inglés Fuel), como una extensión del CVRP (Xiao, Zhao, Kaku, & Xu, 2012) (Toro, J, & F.,

2017), en el cual, los autores han considerado una tasa de consumo de combustible que está fuertemente relacionada con el peso neto del vehículo, obtenido como la sumatoria entre el peso del vehículo vacío y el peso de la carga del vehículo. Al revisar si el peso del vehículo presenta una relación con las unidades de combustible consumidas por unidad de distancia, los autores encontraron que dichas variables están fuertemente relacionadas, hallando una ecuación lineal que representa el modelo, y que al generalizarla se podría presentar en la ecuación (3.58):

$$p(Q_l) = \alpha(Q_0 + Q_l) + b \quad (3.58)$$

Donde Q es la capacidad máxima del vehículo y p_0 es la tasa del consumo de combustible del vehículo cuando este vacío y p^* es la tasa del consumo de combustible del vehículo cargado (ecuaciones (3.59), (3.60) y (3.61)):

$$p_0 = \alpha Q_0 + b \quad (3.59)$$

$$p^* = \alpha(Q_0 + Q) + b \quad (3.60)$$

$$y \quad \alpha = \frac{p^* - p_0}{Q} \quad (3.61)$$

Entonces la ecuación (3.62) corresponde a reescribir Q :

$$p(Q_l) = p_0 + \frac{p^* - p_0}{Q} Q_l \quad (3.62)$$

El costo del consumo de combustible es representado como la multiplicación del costo unitario de combustible C_0 por el consumo de combustible a lo largo de la ruta p_{ij} por la distancia recorrida de i a j d_{ij} ilustrada en la ecuación (3.63).

$$C_{fuel}^{ij} = C_0 p_{ij} d_{ij} \quad (3.63)$$

El costo del combustible consumido por un vehículo, considera la sumatoria de todos los arcos visitados en una ruta, así denotando r como el conjunto de clientes que conforma una ruta se tiene en la ecuación (3.64):

$$C_{fuel} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r C_0 p_{ij} d_{ij} x_{ij} \quad (3.64)$$

Donde x_{ij} es una variable de decisión binaria que equivale a 1 si el arco $\{i, j\}$ existe. El consumo de combustible a lo largo de la ruta p_{ij} varía de acuerdo a la carga del vehículo entre cada nodo, así el peso de la carga que toma el vehículo es considerado una variable de decisión y_{ij} que es introducida en la ecuación anterior, así en la ecuación (3.65):

$$p_{ij} = p_o + \frac{p^* - p_o}{Q} y_{ij} = p_o + \alpha y_{ij} \quad (3.65)$$

La función objetivo es formulada como la ecuación (3.66):

$$\text{Min } C_{fuel} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n C_0 d_{ij} (p_0 x_{ij} + \alpha y_{ij}) \quad (3.66)$$

Corresponde a la suma de los costos de combustible de todos los vehículos. El consumo de combustible puede ser minimizado al diseñar una secuencia óptima de descarga de peso de los vehículos. Los autores demuestran con un pequeño ejemplo, que minimizar la distancia recorrida no es necesariamente suficiente para reducir el consumo de combustible. Atender a los clientes de mayor demanda primero, podría ocasionar que la distancia aumente, pero que el consumo de combustible disminuya.

El modelo presentado en este trabajo de grado maneja el mismo lenguaje o variables, sin embargo como se vio en el capítulo 2 se nombraron de manera diferente por tanto es necesario reescribir la función objetivo de la siguiente manera en la ecuación (3.67):

$$\text{Min } C_{fuel} = \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} C_0 C_{ij} (p_0 S_{ij} + \alpha I_{ij}) \quad (3.67)$$

Donde:

C_0 corresponde al costo unitario de combustible (\$/litro)

C_{ij} corresponde a la distancia Euclidiana entre los nodos i, j (Kilometros)

$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{cuando el arco } i \text{ a } j \text{ es recorrido por un vehiculo} \\ 0 & \text{cuando el arco } i \text{ a } j \text{ no es recorrido por un vehiculo} \end{cases}$

I_{ij} corresponde a la carga que lleva el vehiculo del nodo i al nodo j (Kilogramos)

En el artículo no se hace aclaración sobre las unidades de p por tanto se ha concluido en base a la naturaleza de los datos que al tratarse de peso del camión se manejara en kilogramos, sin embargo para Q si se establece que se trata de unidades, por tanto es preciso mostrar el siguiente análisis de unidades en la ecuación (3.68):

$$\left(\frac{\$}{litro} \right) * (km) * \left(litros/km + \left(\frac{litros/km}{kg} \right) * kg \right)$$

$$\left(\frac{\$}{litros} \right) * (km) * (litros/km) = \$ \quad (3.68)$$

Del artículo de *Xiao, Zhao, Kaku, & Xu* se toma el siguiente ejemplo con el fin de hacer una prueba al código desarrollado, es de notar que los costos de combustible del modelo OVRP deben ser inferiores al VRP manejo por los autores ya que se toma encuentra el regreso al depósito en el cálculo de la función objetivo.

Se suponen tres clientes, un depósito y además de los siguientes datos en la *Tabla 3.3*:

Tabla 3.3: Ejemplo costo de combustible

	ID	Coordenadas	Demanda
Deposito	1	(1,1)	0
Cliente 1	2	(2,3)	8
Cliente 2	3	(4,2)	10
Cliente 3	4	(5,5)	2

Costo unitario de combustible =1

Peso del vehículo vacío=1

Peso del vehículo cargado=2

Capacidad del vehículo=20

Se resolvió el modelo mostrado de OVRP cambiando la función objetivo por la descrita anteriormente, obteniendo los siguientes resultados:

Ruta: 1-2-3-4

Valor de función objetivo: 11,53

Es de notar que la ruta obtenida coincide con la mostrada en el artículo citado, sin embargo con el fin de comprobar la correcta ejecución de la función objetivo se decidió desarrollar la ecuación de esta para verificar los resultados en la *Tabla 3.4*:

Tabla 3.4: Distancias entre nodos

Nodo	1	2	3	4
1	0	2,24	3,16	5,66
2	2,24	0	2,24	3,6
3	3,16	2,24	0	3,16
4	5,66	3,6	3,16	0

Los valores de l_{ij} se toman de la *figura 3.6* a continuación

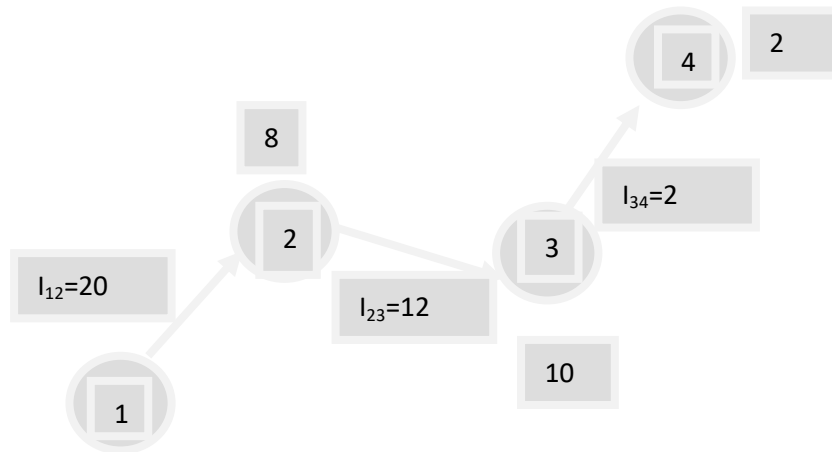


Figura 3.6: Ejemplo. Fuente el autor.

El cálculo de α se muestra en la ecuación (3.69).

$$\alpha = \frac{2 - 1}{20} = 0,05 \quad (3.69)$$

El desarrollo de la función objetivo se obtiene así en la ecuación (3.70):

$$\text{Minimizar consumo de combustible: } C_0 * C_{12} * (p_0 * S_{12} + \alpha * I_{12}) + C_0 * C_{13} * (p_0 * S_{13} + \alpha * I_{13}) + C_0 * C_{14} * (p_0 * S_{14} + \alpha * I_{14}) + C_0 * C_{21} * (p_0 * S_{21} + \alpha * I_{21}) + C_0 * C_{23} * (p_0 * S_{23} + \alpha * I_{23}) + C_0 * C_{24} * (p_0 * S_{24} + \alpha * I_{24}) + C_0 * C_{31} * (p_0 * S_{31} + \alpha * I_{31}) + C_0 * C_{32} * (p_0 * S_{32} + \alpha * I_{32}) + C_0 * C_{34} * (p_0 * S_{34} + \alpha * I_{34}) \quad (3.70)$$

Al reemplazar los datos proporcionados al dar solución al modelo se obtiene la ecuación (3.71):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar consumo de combustible: } & C_0 * C_{12} * (p_0 * S_{12} + \alpha * I_{12}) + C_0 * C_{23} \\ & * (p_0 * S_{23} + \alpha * I_{23}) + C_0 * C_{34} * (p_0 * S_{34} + \alpha * I_{34}) \\ = & 1 * 2,24 * (1 * 1 + 0,05 * 20) + 1 * 2,24 \\ & * (1 * 1 + 0,05 * 12) + 1 * 3,16 * (1 * 1 + 0,05 * 2) \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\text{Minimizar consumo de combustible} = 11,53$$

Por lo cual se concluye que el código se está ejecutando de una forma adecuada y por tanto es confiable.

3.2.1 ANALISIS DE SENSIBILIDAD

Tomando el ejemplo del artículo de Xiao, Zhao, Kaku, & Xu, 2012 mencionado con anterioridad se realiza un análisis de sensibilidad para las tasas de consumo de combustible:

Parámetros de referencia

$$p_0 = 1$$

$$p = 2$$

$$C_0 = 1$$

Tabla 3.5: Resultados obtenidos

Experimento	Parámetros	Valor de la función objetivo	Ruta obtenida
1	$p_0 = 1$ $p = 1$ $C_0 = 1$	7.634413615	
2	$p_0 = 1$ $p = 1.1$ $C_0 = 1$	8.023807268	
3	$p_0 = 1$ $p = 1,2$ $C_0 = 1$	8.413200921	
4	$p_0 = 1$ $p = 1,3$	8.802594574	

	$C_0 = 1$		
5	$p_0 = 1$ $p = 1,4$ $C_0 = 1$	9.191988227	
6	$p_0 = 1$ $p = 1,5$ $C_0 = 1$	9.58138188	
7	$p_0 = 1$ $p = 1,6$ $C_0 = 1$	9.970775533	
8	$p_0 = 1$ $p = 1,7$ $C_0 = 1$	10.36016919	
9	$p_0 = 1$ $p = 1,8$ $C_0 = 1$	10.74956284	
10	$p_0 = 1$ $p = 1,9$ $C_0 = 1$	11.13895649	
11	$p_0 = 1$ $p = 2$ $C_0 = 1$	11.52835015	1-2-3-4
12	$p_0 = 1$ $p = 2.1$ $C_0 = 1$	11.9177438	
13	$p_0 = 1$ $p = 2.2$ $C_0 = 1$	12.29024916	1-2 1-3-4
14	$p_0 = 1$ $p = 2.3$ $C_0 = 1$	12.60105132	1-2 1-3-4
15	$p_0 = 1$ $p = 2.4$ $C_0 = 1$	12.91185347	
16	$p_0 = 1$ $p = 2.5$ $C_0 = 1$	13.22265563	

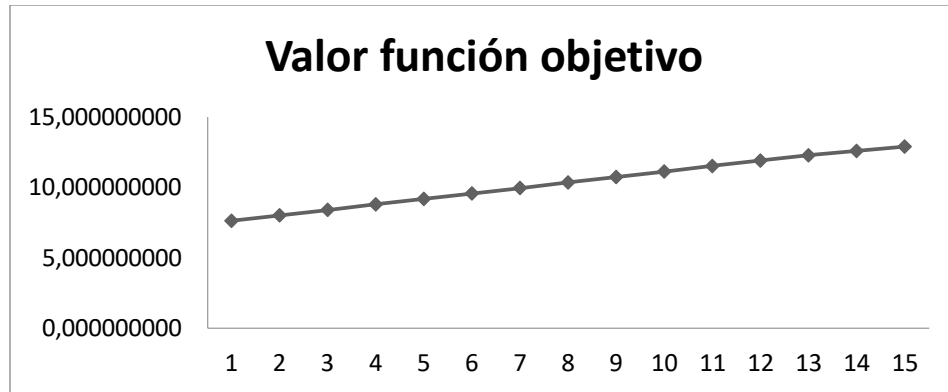


Figura 3.7: Resultados análisis de sensibilidad. Fuente el autor.

Como es posible observar tanto en la tabla 3.5 y en la figura 3.12 3.6 al crecer el valor de p , el valor de la función objetivo crece en 0,39 hasta la iteración número 37 donde el número de rutas aumenta a dos y de allí sigue aumentando en 0,31. Lo cual indica que la función objetivo es sensible al aumento de la tasa del consumo de combustible.

4.2.3 PARÁMETROS DEL MODELO

Investigadores de la Universidad de Michigan Instituto de Investigación de Transporte (UMITRI, 2014) afirman que el consumo de combustible de los vehículos nuevos de turismos, camiones ligeros, camionetas y vehículos utilitarios deportivos fue de 25,3 millas por galón es decir 10, 76 km/litro o 0,093 litros/km

Se decide trabajar con los siguientes valores de parámetros:

$$C_0 \text{ costo unitario de combustible } (\$/\text{litro}) = 20,11 \$/\text{litro}$$

Valor de referencia \$ 7612 por galón (marzo de 2016, <https://www.portafolio.co/economia/gobierno/precio-combustibles-gasolina-acpm-marzo-2016-491654>)

$$p_o = \text{tasa de consumo de combustible cuando el camion esta vacio} \\ = 0,01 \text{ litro/kilometro}$$

$p_o = \text{tasa de consumo de combustible cuando el camión está lleno} = 0,02 \text{ litro/kilometro}$

Valor de referencia según artículo de *Xiao, Zhao, Kaku, & Xu, 2012*

Es de notar que tanto los parámetros como los valores del modelo se asumieron divididos por cien por tanto los valores presentados anteriormente también fueron divididos por tal factor.

3.3 FUNCION OBJETIVO ALTERNATIVA: BALANCEO DE RUTAS

Es importante tener un buen equilibrio de carga y la utilización de recursos, con el propósito de minimizar los costos de adquisición y mantenimiento de vehículos (Silvia Schwarze, Stefan Voß, 2012). Consideremos el siguiente ejemplo. Una empresa de servicios lleva a cabo trabajos de reparación en un taller de reparación central, así como en los domicilios de los clientes. En este caso, los domicilios de los clientes corresponden a los nodos. Dependiendo de la carga de trabajo, será posible que un solo técnico es capaz de servir a todos los puestos de trabajo en las instalaciones del cliente dentro de su tiempo de trabajo mientras que sus colegas llevan a cabo los trabajos en el taller central de reparaciones. En términos de costos de enrutamiento totales, esto podría ser una buena solución. Sin embargo, en términos de satisfacción de los empleados, una solución tan desequilibrada puede ser problemática. Por otra parte, el cliente requiere la más alta habilidad, entonces sólo el técnico que ofrece la más alta habilidad puede realizar el trabajo. Es probable que en su gira, el técnico tenga que cumplir con los trabajos que requieran una habilidad menor. Mientras tanto, su experiencia le faltaría al el centro de la tienda de reparación, es decir, la solución es mala en términos de utilización de recursos (Silvia Schwarze , Stefan Voß).

PARÁMETROS

Variables de decisión:

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{cuando el arco } i \text{ a } j \text{ es recorrido por un vehiculo} \\ 0 & \text{cuando el arco } i \text{ a } j \text{ no es recorrido por un vehiculo} \end{cases}$$

Esta variable se define para todo el conjunto de arcos existentes (entre clientes, entre depósito y clientes).

$$E_i = \begin{cases} 1 & \text{cuando se activa el nodo } i \text{ y es añadido a la ruta} \\ 0 & \text{cuando no se activa el nodo } i \text{ y por tanto no es añadido a la ruta} \end{cases}$$

I_{ij} = Carga en el nodo i del vehículo j

$d_i = d_j$ Es una variable que especifica la distancia total recorrida (incluyendo los que al nodo i) atendidos por vehículo desde su última visita a un depósito en el momento en que alcanza el nodo cliente i

Parámetros:

C_{ij} = matriz de distancias entre nodos y entre depósito y nodos

D_j = demanda de cada nodo

Q = capacidad del vehículo

C_x = coordenadas del cliente y depósito en el eje x

C_y = coordenadas del cliente y el depósito en el eje y

h_{\min} = Límite inferior de longitud de ruta

h_{\max} = Límite superior de longitud de ruta (función objetivo)

M = constante positiva grande

3.3.1 MODELAMIENTO MATEMÁTICO.

$$\text{Minimizar } FO: h_{\max} \tag{3.72}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i \in V} S_{ij} = 1 \quad \text{para } j \in J \text{ y todo } i \neq j \tag{3.73}$$

$$\sum_{k \in J} S_{jk} + E_j = \sum_{i \in V} S_{ij} \quad \text{para todo } j \in J \tag{3.74}$$

$$S_{ij} + S_{ji} \leq 1 \quad \text{para todo } i \in V \text{ y } j \in V \tag{3.75}$$

$$\sum_{i \in V} I_{ij} = \sum_{k \in V} (I_{ij} + D_j) \text{ para todo } j \in J \text{ y con } i \neq j \text{ y } k \neq j \quad (3.76)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} S_{ij} = \text{card}(J) \quad (3.77)$$

$$L_{ij} \leq QS_{ij} \text{ para todo } i \in V \text{ y } j \in V \quad (3.78)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} S_{ij} \geq \frac{\sum_{i \in J} D_j}{Q} \quad (3.79)$$

$$\sum_{i \in V} S_{ij} \geq \sum_{k \in J} S_{jk} \text{ para todo } j \in J \quad (3.80)$$

$$(d_j - d_i - C_{ij}) \leq M(1 - S_{ij}) \text{ para todo } i \in V \text{ y todo } j \in V \quad (3.81)$$

$$(d_j - d_i - C_{ij}) \leq -M(1 - S_{ij}) \text{ para todo } i \in V \text{ y todo } j \in V \quad (3.82)$$

$$d_j \leq h_{\max} \text{ para todo } i \in J \quad (3.83)$$

$$d_i \geq h_{\min} * E_i \text{ para todo } i \in J \quad (3.84)$$

$$\sum_{j \in J} E_j \geq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} S_{ij} \quad (3.85)$$

$$S_{ij} \text{ binaria} \quad (3.86)$$

$$h_{\max} \geq h_{\min} \quad (3.87)$$

La ecuación (3.72) corresponde a la función objetivo que busca minimizar la longitud máxima de a ruta.

Las ecuaciones en 166 a 180 definen las restricciones de la siguiente forma:

(3.73). Cada nodo tendrá un único arco de llegada.

(3.74). Se puede llegar a un nodo pero no salir de este necesariamente, constituyéndose este en un nodo terminal.

(3.75). Esta restricción evita la duplicación de arcos e indica el sentido del mismo.

(3.76). Están son las encargadas del balance de las rutas, es decir garantizan que lo que entre a un nodo sea igual a lo que sale más la demanda o lo que se quedó en ese nodo.

(3.77). Identifica los arcos activos que generan topología radial para las rutas.

(3.78). Con esta restricción se garantiza el balance de flujos de demanda en los vehículos. Se tiene la variable L_{ij} como la cantidad de carga que lleva un vehículo. Esta restricción indica que el flujo de carga que sale de un nodo es igual al flujo que llega más la demanda del mismo nodo.

(3.79). Se garantiza que el número de rutas es suficiente para atender toda la demanda de los clientes. Esto se consigue haciendo que la sumatoria de todos los arcos que salen del depósito sean igual (o eventualmente menor si la demanda puede ser atendida con menos vehículos) al cociente de la demanda total con la capacidad de los vehículos.

(3.80). Garantiza la continuidad de la ruta.

(3.81) y (3.82). Estas restricciones además de darle robustez de la formulación, asigna valores a la carga las variables, d_j en los nodos cliente, sino que también actúan para prevenir la formación de subtours. Siempre que se utiliza un vehículo, estas limitaciones obligan la ruta del vehículo para pasar a través de un depósito y, al hacerlo, impiden la formación de subtours en la red

(3.83). Esta restricción asegura que la distancia máxima acumulada hasta el nodo j no exceda la longitud máxima de ruta deseada.

(3.84). Esta restricción asegura que la distancia máxima acumulada hasta el nodo j sea mayor a la longitud de ruta deseada.

(3.85). condición que asegura que para cada ruta se active la cantidad de nodos correspondiente al número de arcos activados.

(3.86). establece la variable S_{ij} como binaria

(3.87). Obliga a que el valor de la longitud máxima de ruta sea mayor al mínimo establecido siempre y cuando ese nodo pertenezca a la ruta.

Para dar mayor claridad a algunas de las restricciones se recurre al ejemplo mostrado en la figura 3.2. Y con ello se realiza una aclaración sobre la ecuación (3.81), la cual se muestra desarrollada en las ecuaciones (3.88) y (3.89).

Para $i=1$ y $j=2$

$$d_2 - d_1 - C_{12} \leq M(1 - S_{12}) \quad (3.88)$$

Para $i=2$ y $j=3$

$$d_3 - d_2 - C_{23} \leq M(1 - S_{23}) \quad (3.89)$$

La anterior restricción es la liberalización de la ecuación (3.90):

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} S_{ij}(d_j + d_i - C_{ij}) = 0 \text{ para todo } j \in V \quad (3.90)$$

M es una constante positiva grande; con un valor límite inferior definido por Silvia Schwarze , Stefan Voß en la ecuación (3.91):

$$\min(M) = \max\{2Q, R + \max\{s_i + t_{ij}\}\} \quad (3.91)$$

Donde:

Q = carga del vehículo, la capacidad de carga

R = gama de vehículos (longitud de un turno).

s_i = El tiempo de servicio en el nodo i .

t_{ij} = Tiempo de viaje del nodo i al nodo j

Debido a que e en el problema que se trata en esta trabajo no se incluye los tiempos de viaje y de servicio se decide tomar como valor mínimo de M la primera parte de la ecuación.

d_j Es una variable que especifica la distancia total recorrida (incluyendo los que al nodo i) atendidos por vehículo desde su última visita a un depósito en el momento en que alcanza el nodo cliente i (ecuaciones (3.92) y (3.93)):

$$4 - 0 - 4 = M(1 - 1) \quad (3.92)$$

$$(\sqrt{5} + 4) - 4 - \sqrt{5} = M(1 - 1) \quad (3.93)$$

Se generan en total 25 restricciones de este tipo

A continuación se ejemplifica la ecuación (3.94):

$$(d_j - d_i - C_{ij}) \leq -M(1 - S_{ij}) \quad (3.94)$$

Esta restricción corresponde al acotamiento inferior del anterior grupo de ecuaciones, por tanto se forman 25 restricciones adicionales.

4.1 RESULTADOS OBTENIDOS

Todos los modelos fueron implementados en AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming [R. Fourer, 2002] y resueltos con CPLEX 12.5 [ILOG, 2009], usando un computador AMD A10-8700P Radeon R6, 16 GB of RAM.

4.1.1 RESULTADOS MODELO MULTI OBJETIVO COSTO-EFECTOS AMBIENTALES

Para aplicar la técnica EPSILON-CONSTRAIN es necesario resolver el modelo optimizando cada una de las funciones objetivo y dejando la otra función objetivo como restricción, para este caso se consideran dos funciones objetivo:

1. La primera función objetivo minimiza los costos
2. La segunda función objetivo minimiza las emisiones

Para este caso se corren 10 casos iniciales de prueba, datos que fueron tomados de <http://vrp.atd-lab.inf.puc-rio.br/index.php/en/> . A continuación en las tablas 4.1 a 4.2 y figuras 4.1 y 4.2 se ejemplifican tanto los datos obtenidos como los frentes de Pareto para dos de las instancias seleccionadas:

Tabla 4 1: Resultados instancia A32-5 con efectos ambientales

FO ₁	FO ₂
504	158,9961028
504	159
504	159,1

504	159,2
504	159,5
504,06	159,6908724
504,03	159,6908724
504,01	159,6908724
503	159,6908724
500	159,6908724
490	159,6908724
489	159,6908724
488	159,6908724
487,31	159,6908724

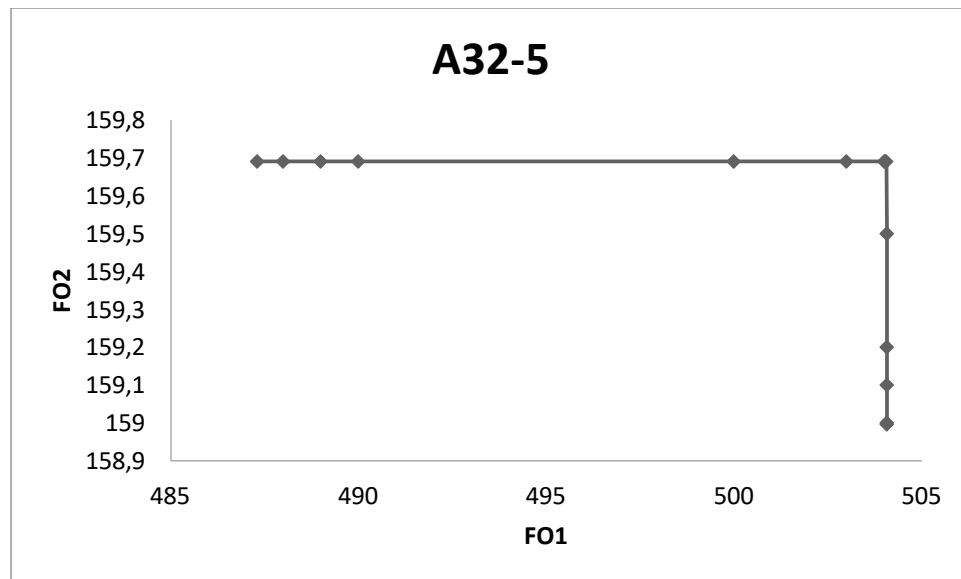


Figura 4.1: Frente de Pareto instancia A32-5 con efectos ambientales. Fuente el autor.

Tabla 4. 2: Resultados instancia A33-5 con efectos ambientales

FO ₁	FO ₂
425	131,659241
425	131,659241
426	131,659241

427	131,659241
428	131,659241
428,3	131,659241
428,44	131,659241
428,47	131,659241
428	130,379174

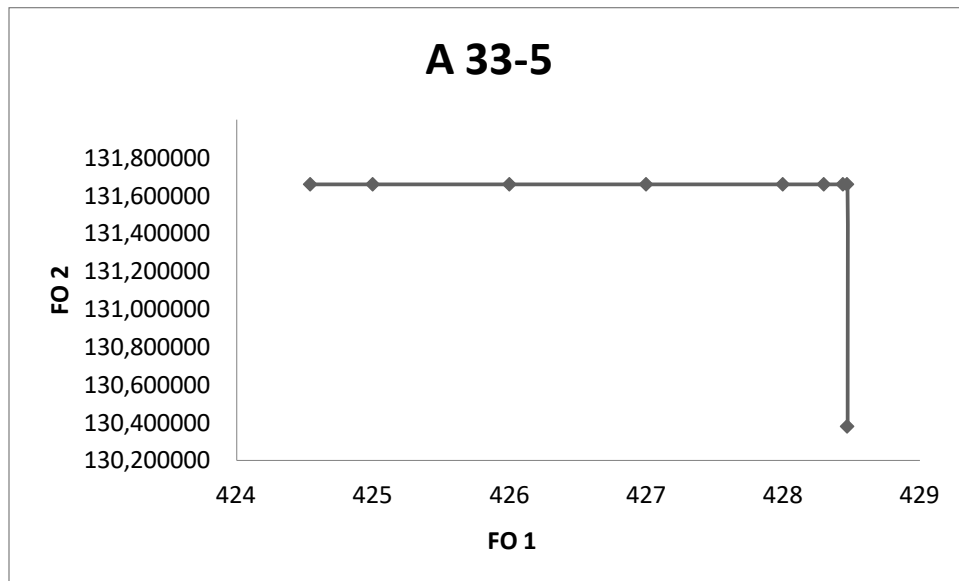


Figura 4 I: Frente de Pareto instancia A33-5 con efectos ambientales. Fuente el autor.

La definición técnica de frente de Pareto podría ser la siguiente: sea P un problema de optimización multi-objetivo. Se dice entonces que una solución es pareto-óptima cuando no existe otra solución tal que mejore en un objetivo sin empeorar al menos uno de los otros. Desde este punto de vista, el concepto se utiliza a fin de analizar las posibles opciones óptimas de un individuo dada una variedad de objetivos o deseos y uno o varios criterios de evaluación. Dado un “universo” de alternativas se busca determinar el conjunto que son eficientes de acuerdo con Pareto (es decir, aquellas alternativas que satisfacen la condición de no poder satisfacer mejor uno de esos deseos u objetivos sin empeorar algún otro). Ese conjunto de alternativas óptimas establece un “conjunto de Pareto” o la “Frontera de Pareto”. El estudio de las soluciones en la frontera permite a los diseñadores analizar las posibles alternativas dentro de los parámetros

establecidos, sin tener que analizar la totalidad de posibles soluciones como lo muestra la figura 4.3.

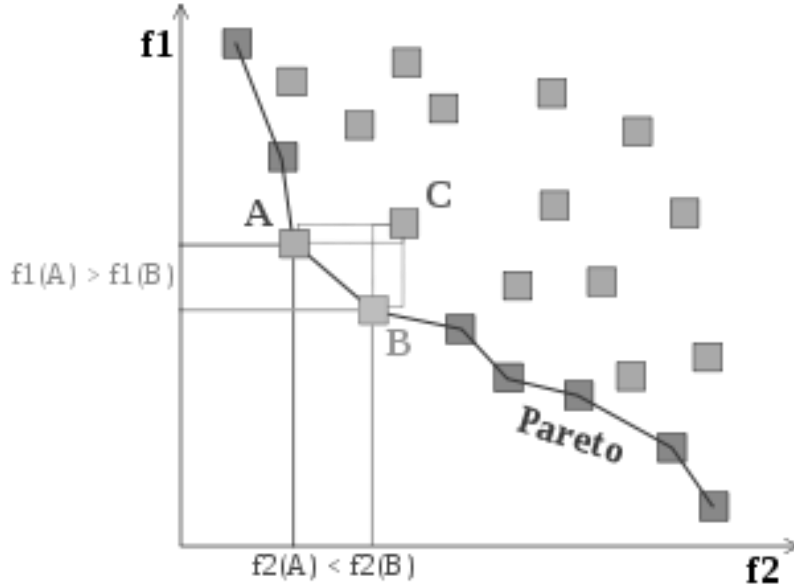


Figura 4. 2: Frente de Pareto

A continuación se definen los conceptos de dominio y optimización de Pareto, aplicados a un problema de minimización; la extensión al caso de un problema de maximización es trivial.

Dominancia de Pareto: Dado un vector $u = (u_1, \dots, u_k)$, se dice que domina a otro vector $v = (v_1, \dots, v_k)$ si y sólo si (4.1):

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, u_i \leq v_i \text{ y } \exists i_0 \in \{1, \dots, k\} \mid u_{i_0} < v_{i_0} \quad (4.1)$$

Optimalidad de Pareto: Una solución x^* se dice que es Pareto-óptima si y sólo si no existe otro vector x tal que $v = f(x) = (v_1, \dots, v_k)$ domine a $u = f(x^*) = (u_1, \dots, u_k)$. En otras palabras, la definición anterior dice que el punto x^* es un óptimo de Pareto si no existe un vector x que haga mejorar alguno de los objetivos —respecto a los valores obtenidos para x^* — sin que empeore de forma simultánea alguno de los otros. En general, la solución en el sentido de Pareto al problema de optimización multiobjetivo no será única: la solución estará formada por el

conjunto de todos los vectores no dominados, a los que se conoce con el nombre de conjunto de no dominados o frente de Pareto.

Las graficas dadas por las soluciones del modelo multi-objetivo no constituyen un frente de Pareto debido a que no se cumple la condición Pareto-óptima porque en algunos puntos de la grafica existe otra solución tal que mejore en un objetivo y mejora el otro al mismo tiempo.

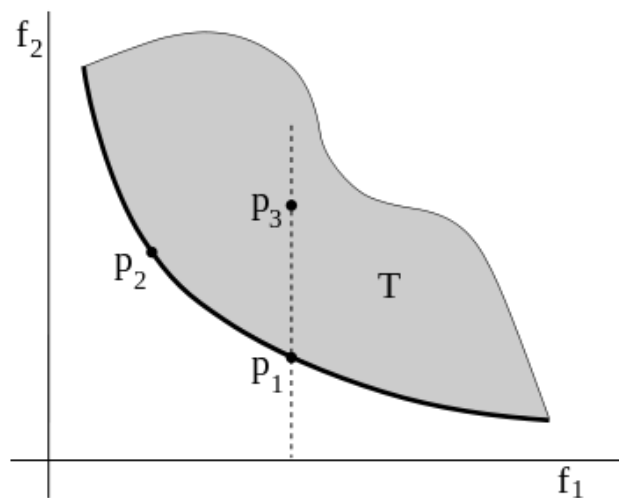


Figura 4 3: Frontera Pareto-optima

En la figura 4.4 se representa con trazo grueso, el frente de Pareto de una función con 2 objetivos. El área coloreada T representa la imagen de dicha función objetivo. Se puede observar que no existe ningún punto perteneciente a T que mejore en el sentido de Pareto, a algún punto del Frente: eligiendo un punto de T de forma arbitraria, por ejemplo p_3 , se puede trazar la vertical hasta obtener el punto de corte con el Frente de Pareto, en este caso p_1 ; dicho punto de corte siempre tendrá el mismo valor de f_1 y un valor mejor de f_2 . También se puede observar que para 2 puntos cualesquiera del Frente de Pareto, nunca habrá uno que mejore de forma simultánea los dos objetivos respecto al otro punto. Cogiendo por ejemplo los p_1 y p_2 , se observa que para p_1 mejora f_2 , pero a costa de empeorar f_1 (se está considerando un caso de minimización).

4.1.2 RESULTADOS MODELO MULTIOBJETIVO COSTO – BALANCEO DE RUTA

Un gran número de casos son estudiados con el fin de analizar el desempeño del modelo propuesto. El objetivo es observar el potencial del modelo matemático propuesto para resolver estos problemas. Los casos van de 16 a 101 clientes. En las casos estudiadas son descritas las principales características, que depende del problema estudiado, que en general son las siguientes: nombre del caso, tiempo requerido en segundos en cada caso estudiado, función objetivo total y GAP en porcentaje. El GAP corresponde a la diferencia entre el límite superior (LB) y el inferior (UB) obtenido por el algoritmo Branch and Bound usando el CPLEX. Así el GAP corresponde a la brecha inexplorada del proceso y hasta no ser igual a cero no es posible afirmar que se ha encontrado el óptimo global.

Se corrieron 18 casos tomados (Augerat & Eilion, <http://vrp.atd-lab.inf.puc-rio.br/index.php/en/>). Para la validación del modelo construido se realizo una comparación de resultados de la función objetivo costos y los resultados presentados por AN Letchford, Lysgaard y RW Eglese en su artículo A branch-and-cut algorithm for the capacitated open vehicle routing problema (Letchford & Eglese, 2007), los resultados son mostrados a continuación, estas instancias codificaron el lenguaje C usando compilador C++ . Para resolver los modelos se uso CPLEX .Todos los experimentos fuerin realizados en un computados Intel Pentium M con 1.6Hz y RAM de 512, con Windoes XP.

Como es posible observar en la tabla 4.3 el modelo presentado mejora del artículo anteriormente mencionado en dos instancias e iguala sus resultados en 6 instancias, es de notar que en algunos casos el GAP no alcanzo el 0% por tanto no se exploró la totalidad del espacio de soluciones. Es de notar que en 1 instancias los resultados de la función objetivo de minimización de costos es superior sin embargo esta diferencia es de 2 unidades, en las restantes los resultado son iguales.

Tabla 4. 3: Comparación de resultados con la literatura

	OVRP	Letchford & Eglese, 2007	
NOMBRE	MIN	MIN	TIEMPO (sg)
A n 33 k5	424.54	424,543	0.2
A n 34 k5	494,2	494,313	0.3
E n 22 k4	252,61	252,614	0.08
E n 23 k3	431,2	442.984	0.3
E n 30 k3	336,79	393.512*	1
E n 33k4	511,26	511.263*	0.6
P n16 k8	235,06	235,060	0.09
P n19 k2	157,35	168.57	0.2
P n23 k8	286,69	302.87	36
P n40 k5	349,55	349.552	2
P n45 k5	391,81	391.809	4
P n50 k7	397,38	397.376	24
P n55 k7	411,58	411.581	7
P n55 k10	446,06	444.308	128
P n60 k10	480,83	482.085	914
P n76 k4	518,98	522.94	319
P n76 k5	520,18	525.635	1367
P n101 k4	621,28	621.749	45

En la tabla 4.4 se presenta un resumen de los resultados obtenidos al minimizar las funciones objetivo, el valor de la función objetivo para el primer modelo (OVRP MIN) corresponde al costo minimizado y el valor para la función objetivo de balanceo (OVRPRB) corresponde a la máxima longitud de la ruta.

Tabla 4.4. Resumen resultados del modelo

	OVRP		OVRPRB	
NOMBRE	MIN	TIEMPO (sg)	MIN	TIEMPO (sg)
A n 33 k5	424.54	1	73.36	7
A n 34 k5	494,2	1	761.577	8
E n 22 k4	252,61	1	49,366	6
E n 23 k3	431,2	1	80,7217	5
E n 30 k3	336,79	1	68,7677	1
E n 33k4	511,26	1485	123,294	152888
P n16 k8	235,06	1	32,56	6
P n19 k2	157,35	1	43.93	8
P n23 k8	286,69	22	43,9318	2

P n40 k5	349,55	9	43.93	4
P n45 k5	391,81	53.66	568.064	73423.20
P n50 k7	397,38	99	37,108	102
P n55 k7	411,58	35,27	38.747	58886
P n55 k10	446,06	3984.27	37.108	715.33
P n60 k10	480,83	3549.31	424.264	243.45
P n76 k4	518,98	28.33	43.27	1956
P n76 k5	520,18	404	583.276	328504
P n101 k4	621,28	3276	103.866	58673

4.1.3 CONSTRUCCION DE FRENTES DE PATERO

Para la construcción de los frentes de Pareto se corre inicialmente el modelo con el parámetro H_{min} en 0 y minimizando la función objetivo de costos. A continuación de acuerdo a los resultados de distancia mínima de ruta se asigna valor a H_{min} y de nuevo se vuelve a correr el modelo, resultado que se puede observar en la primera línea de la tabla, a continuación se minimiza la función de longitud de ruta para así encontrar los puntos mínimos y máximos de las funciones objetivo. Para construir el resto de puntos del frente de Pareto se toma el entero menor del valor de la función objetivo de longitud de ruta y se pone como restricción y así sucesivamente hasta llegar al límite inferior.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para cada una de las instancias seleccionadas. En las Tablas 4.6 a 4.39 se presentan los resultados obtenidos para el modelo multiobjetivo, donde k representa el número de vehículos de la flota. *FO COSTO* corresponde a la función objetivo que busca minimizar los costos, *FO HAMX* corresponde a la función objetivo que busca minimizar la ruta más larga, se tiene además como dato la longitud de la ruta más larga y la mas costa, el tiempo de procesamiento requerido dado en segundos y el *GAP* cuando es diferente de cero. El tiempo requerido por el software para resolver los casos de prueba son dados en segundos.

Las instancias son nombradas con la inicial K la cual corresponde al número de vehículos designado

INSTANCIA A 33-K5

Minimizar costo con Hmin=0

F_o costo: 424.13

F_o hmax: 123.25

Numero de rutas: 6

Longitud máxima: 123.2513

Longitud mínima: 7.8102

Hmin de 8

Tabla 4.5.: Resultados frente de Pareto instancia A33-K5

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA
424.54	123.25	5	123.2513	69.0048
434.36	118.505	6	118.505	14.5602
441.72	109.647	5	109.647	69.0048
442.82	96.302	6	96.302	51.8743
454.32	88.8943	6	88.8943	61.0939
531.71	76.321	8	76.321	31.4006
570.84	74.961	8	74.961	63.5857
646.03	73.3553	10	73.3553	40.9610
1317.30	73.36	30	73.36	10.7703

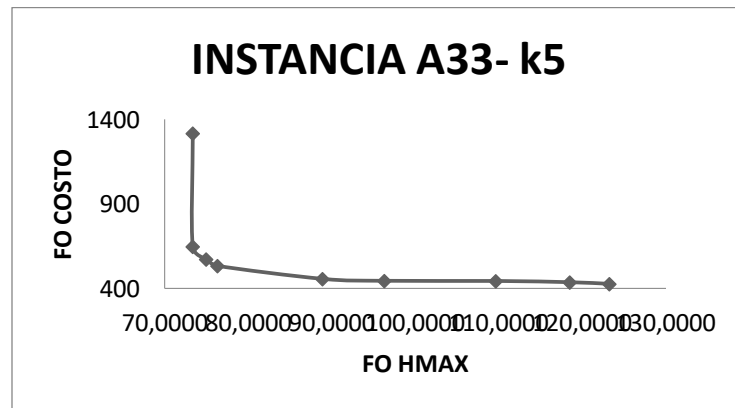


Figura 4.4: Frente de Pareto instancia A33-K5

INSTANCIA A34 -K5

Minimizar costo con Hmin=0

F_o costo: 489.36

F_o hmax: 95.96

Numero de rutas: 6

Longitud máxima: 95.96

Longitud mínima: 36.7857

Hmin de 37

Tabla 4 5: Resultados frente de Pareto instancia A34-K5

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA
494.20	125.68	6	125.68	48.1830
502.35	95.964	6	95.964	50.8369
519.12	91.9134	6	91.9134	76.1900
533.61	89.5668	8	89.5668	48.1830
541.89	87.3374	8	87.3374	37.7780
575.12	79.6876	8	79.6876	50.8369
596.92	76.5454	9	76.5454	48.1830
1514.72	76.1577	26	76.1577	38.4708

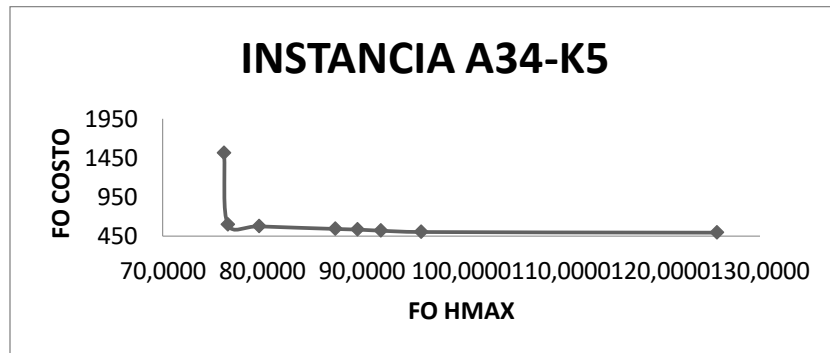


Figura 4.5: Frente de Pareto instancia A34-K5

INSTANCIA P16-8

Minimizar costo con $h_{min}=0$

F_0 costo: 235,06

F_0 hmax: 38,45

Numero de rutas: 8

Longitud máxima: 38,45

Longitud mínima: 12,0416

Hmin de 13

Tabla 4.6: Resultados frente de Pareto instancia P16-K8

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA
244,80	48,33	7	48,33	21,0230
245,37	39,1703	8	39,1703	21,0238
268,75	33,0153	9	33,0153	21,0238
322,16	32,56	11	32,56	21,0238

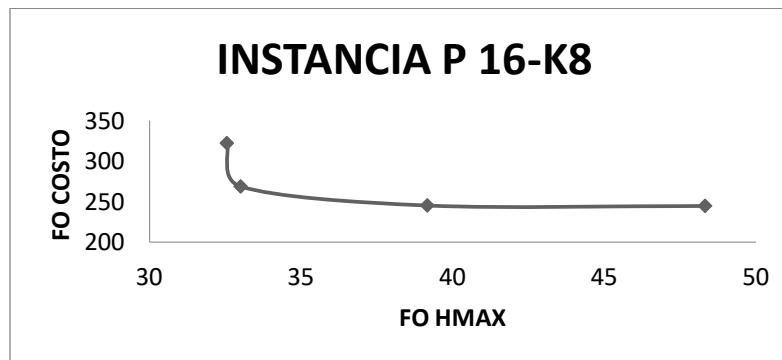


Figura 4.6: Frente de Pareto instancia P16-K8

INSTANCIA P 19-K2

Minimizar costo con Hmin=0

F_o costo: 157.35

F_o hmax: 87.08

Numero de rutas: 3

Longitud máxima: 87.08

Longitud mínima: 22.927

Hmin de 23

Tabla 4.7: Resultados frente de Pareto instancia P19-K2

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA
158.35	87.08	3	87.08	32.9771
165.70	64.5902	3	64.5902	47.3404
170.94	60.2646	3	60.2646	53.7686
171.00	54.1341	4	54.1341	32.9771
174.38	53.9793	4	53.9793	32.9771
182.90	49.3027	4	49.3027	40.6473
185.92	47.7184	4	47.7184	45.2531
195.64	45.6082	4	45.6082	32.9771
222.00	44.6407	6	44.6407	29.2338
234.50	43.9318	6	43.9318	32.9771
343.25	43.93	9	43.93	32.4500

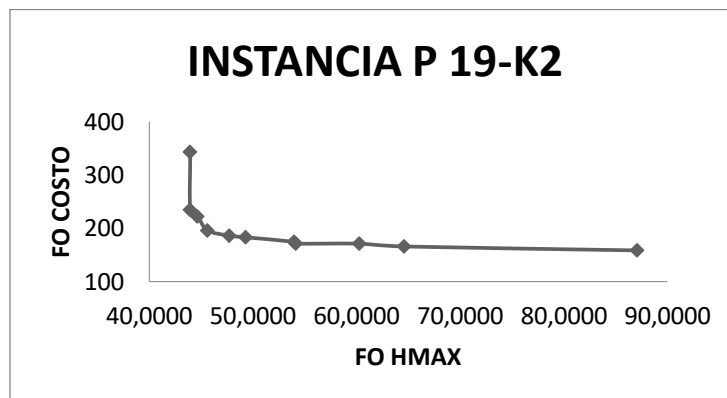


Figura 4.7: Frente de Pareto instancia P19-K2

INSTANCIA P23 -K8

Minimizar costo con hmin=0

Fo costo: 286.69

Fo hmax: 48.6903

Numero de rutas: 9

Longitud máxima: 48.6903

Longitud mínima: 12.0416

Hmin de 22 (con menos no da hmax)

Tabla 4.8: Resultados frente de Pareto instancia P23-K8

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA	TIEMPO (sg)
296,58	48.6903	9	48.6903	22,2457	22
305,85	44,9799	9	44,9799	22,5457	15
324,81	43,9706	9	43,9706	29,2338	6
492.20	43,9318	16	43,9318	22,0227	2

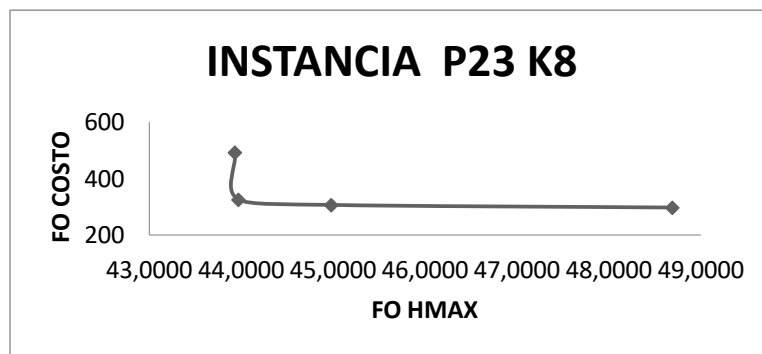


Figura 4.8: Frente de Pareto instancia P23-K8

INSTANCIA P40-K5

Minimizar costo con hmin=0

Fo costo: 349.55 (tiempo 9 sec.) (GAP 0,28%)

Fo hmax: 82.656

Numero de rutas: 5

Longitud máxima: 82.656

Longitud mínima: 55.8819

Hmin de 56

Tabla 4..9: Resultados frente de Pareto instancia P40-K5

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA	TIEMPO (sg)
349.70	82.66	5	82.66	61.3293	12 (0,58%)
361.09	74.3484	5	74.3484	70.0787	2250
367.05	63.9662	6	63.9662	60.1426	9748.80
					(0.05%)
396.76	57.6529	7	57.6529	56.1981	299998.70
					(8.27%)
625.29	57.3468	11	57.3468	56.0694	10404.19
					(2.35%)

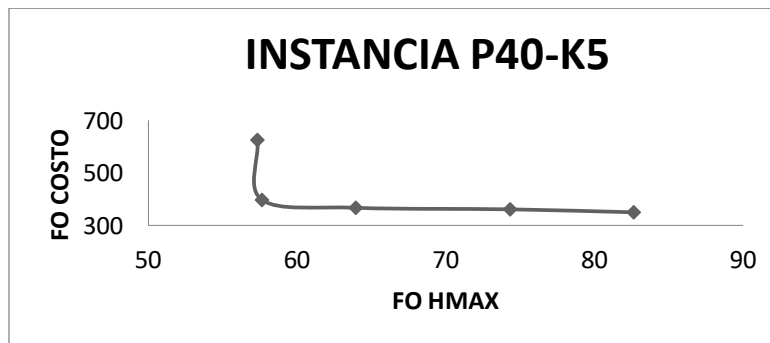


Figura 4.9: Frente de Pareto instancia P40-K5

INSTANCIA P45-K5

Minimizar costo con hmin=0

Fo costo 391.81 (53.66)

Fo hmax: 95.0048

Numero de rutas: 5

Longitud máxima: 95.0048

Longitud mínima: 55.8819 (0,07%)

hmin de 56

Tabla 4..10: Resultados frente de Pareto instancia P45-K5

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA	TIEMPO (sg)
391.96	95.0048	5	95.0048	63.0930	91 (0.18%)
393.05	95.00	5	95.00	63.2544	0.52 (0.21%)
393.31	84.3119	5	84.3119	73.2662	184.97 (0.10%)
396.21	73.2662	6	73.2662	56.7018	221.83 (0.20%)
396.46	72.9293	6	72.9293	58.6849	197.38 (0.47%)
398.63	70.739	6	70.739	58.6849	4143.41 (0.05%)
415.73	66.2241	7	66.2241	56.4270	8297.45 (3.82%)
418.95	62.6004	7	62.6004	57,3021	74161.09
452	57.049	8	57.049	56.1981	302817
732.75	56.8064	13	56.8064	56.0134	73423.20 (1.42%)

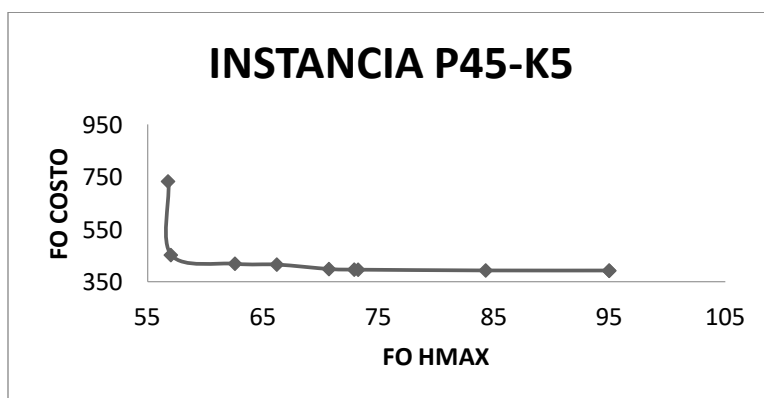


Figura 4.10: Frente de Pareto instancia P45-K5

INSTANCIA P50- K7

Minimizar costo con hmin=0

Fo costo: 397.38

Fo hmax: 80.195

Numero de rutas: 7

Longitud máxima: 95.0048

Longitud mínima: 33.8518

Hmin de 34

Tabla 4.11: Resultados frente de Pareto instancia P50-K7

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA	TIEMPO (sg)
397,83	78,385	7	78.385	38.5162	99
399,91	70,1003	8	70,1003	34,0969	120
399,98	63,2797	7	63,2797	38,5162	362
402,86	58,4694	8	58,4694	34,0969	557
746, 25	37,108	21	37,108	34,0021	102

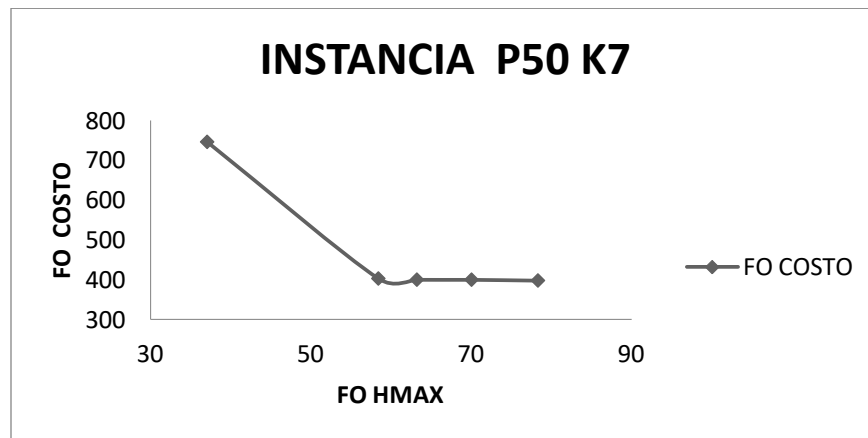


Figura 4.11: Frente de Pareto instancia P50-K7

INSTANCIA P55-10

Minimizar costo con hmin=0

Fo costo: 444.31 (2056.91 sec) (0.10%)

Fo hmax: 63.28

Numero de rutas: 10

Longitud máxima: 63.28

Longitud mínima: 31.4135

Tabla 4.12: Resultados frente de Pareto instancia P55-K10

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA	TIEMPO (sg)
446.06	63.2791	10	63.2791	33.1651	3984.27 (0.02%)
446.08	55.2397	10	55.2397	34.0969	67702.12 (0.01%)
447.64	52.9794	10	52.9794	35.8800	4093.02
451.06	49.5166	11	49.5166	34.0969	48994.03 (0.10%)
455.27	48.687	11	48.687	33.8518	13168.22 (0.18%)
467.60	47.7241	11	47.7241	33.4542	144363.66 (3.82%)
473.63	46.4318	12	46.4318	32.3956	115620.34 (0.03%)
483.04	42.5052	13	32.7961	42.5052	11646.59 (0.12%)
486.74	41.3071	13	41.3071	33.4766	1547.91 (0.43%)
507.16	40.8788	14	40.8788	32.7961	6071.51 (0.01%)
519.24	39.8813	14	39.8813	33.4766	764.05
560.36	38.8588	16	38.8588	32.3049	684.56 (0.15%)
585.47	37.9733	17	37.9733	32.2877	46341.89 (0.02%)
936.50	37.108	27	37.108	32.2227	715.33 (0.32%)

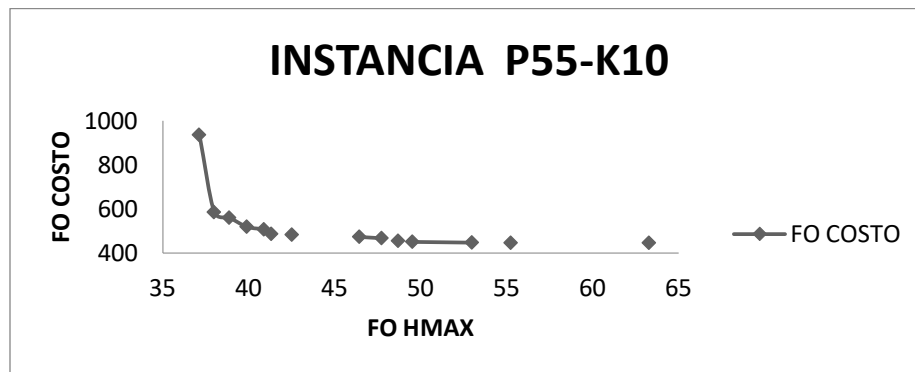


Figura 4.12: Frente de Pareto instancia P55-K10

INSTANCIA P60-K10

Minimizar costo con hmin=0

Fo costo: 480.83 (5321.84 sec) 0.06%

Fo hmax: 57.24

Numero de rutas: 11

Longitud máxima: 57.24

Longitud mínima: 32.7961

Hmin: 32|

Tabla 4.13: Resultados frente de Pareto instancia P60-K10

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA	TIEMPO (sg)
480.83	57.2351	11	57.2351	32.7961	3549.31 (0.09%)
482.64	54.5146	11	54.5146	32.7961	9679.44 (0.01%)
485.23	53.8571	11	53.8571	32.3984	5785.91 (0.22%)
487.34	49.3849	11	49.3849	35.8800	5049.16 (0.59%)
519.93	44.8547	13	44.8547	32.4272	210206.50 (3.76%)
525.43	43.9887	13	43.9887	33.8518	3656.63 (0.12%)
553.02	42.4667	15	42.4667	32.3984	47139.53 (0.04%)
941.43	42.4264	25	42.4264	33.4522	243.45 (4.5%)

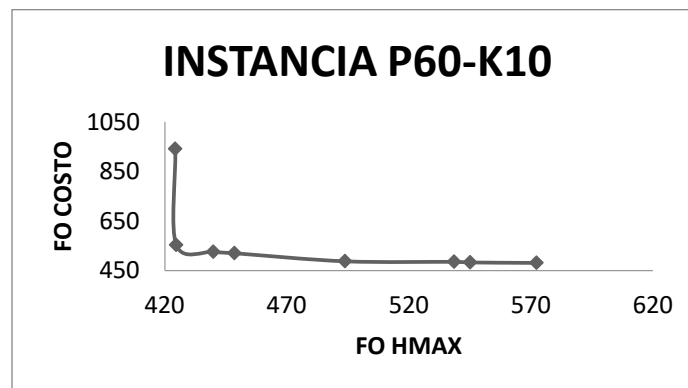


Figura 4.13: Frente de Pareto instancia P60-K10

INSTANCIA P76-K5

Minimizar costo con hmin=0

Fo costo: 520.18

Fo hmax: 132.437

Numero de rutas: 5

Longitud máxima: 132.437

Longitud mínima: 55.4918

Hmin de 56

Tabla 4.14: Resultados frente de Pareto instancia P76-K5

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA	TIEMPO (sg)
520.18	132.437	6	132.437	62.5629	404
520.38	131.28	6	131.28	61.7090	397
520.88	105.036	6	105.036	63.8034	520.88
523.05	98.6616	6	98.6616	83.0165	2927
523.37	95.0414	7	95.0414	57.8269	879
525.49	85.846	7	85.846	57.8269	2876
525.52	83.0013	7	83.0013	57.8269	27811
1316.65	58.3276	23	58.3276	56.1766	328504

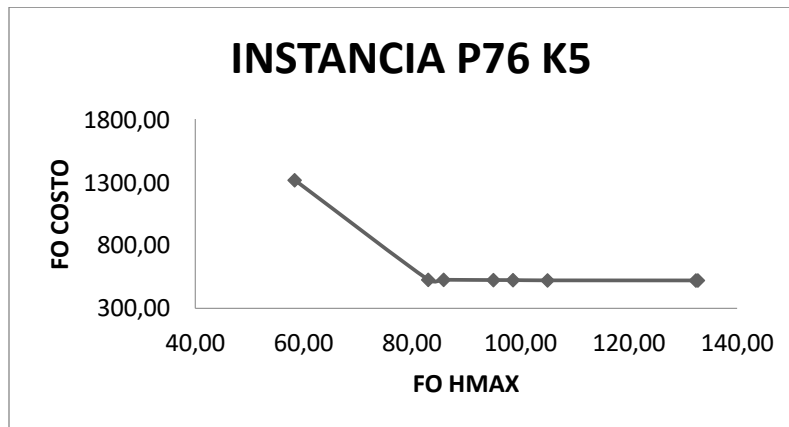


Figura 4.14 Frente de Pareto instancia P76-K5

INSTANCIA P101- K4

Minimizar costo con hmin=0

F_o costo: 621.28

F_o hmax: 142.35

Numero de rutas: 5

Longitud máxima: 142.35

Longitud mínima: 102.5277

Hmin de 103

Tabla 4.15: Resultados frente de Pareto instancia P101-K4

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA	TIEMPO (sg)
621.28	142.35	5	142.35	102.5277	3276
625.72	131.551	5	131.551	118.8002	127087
2452.15	103.866	24	103.866	100.2314	58673

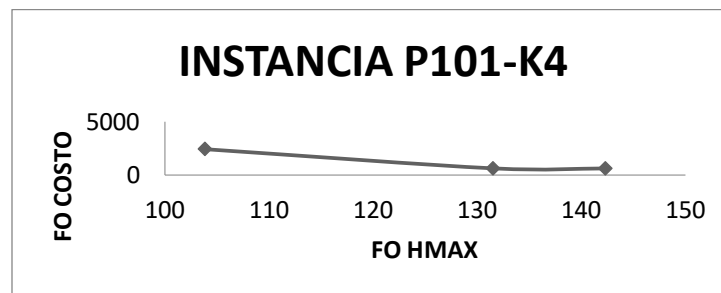


Figura 4.15 Frente de Pareto instancia P101-K4

INSTANCIA E22-K4

Minimizar costo con hmin=0

Fo costo: 252.61

Fo hmax: 77.9644

Numero de rutas: 4

Longitud máxima: 77.9644

Longitud mínima: 45.4714

Hmin de 46

Tabla 4.16: Resultados frente de Pareto instancia E22-K4

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA	TIEMPO (sg)
255,89	77,9644	4	77.9644	61.5772	1
266,19	62,4726	5	62.4726	47.8987	8
275,16	58,6038	5	58.6038	48.7460	10
298,59	53,9286	6	53.9286	47.1737	6
336,72	50,9306	7	50.9306	46.1386	8
380,72	49,403	8	49.403	46.1202	6
434,89	49,366	9	49.366	47.6908	6

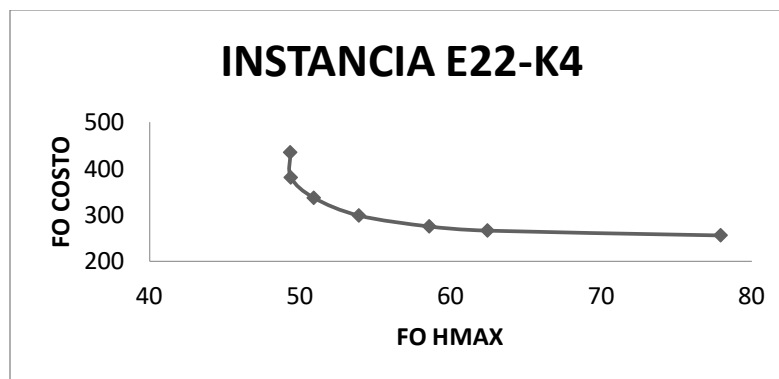


Figura 4.16: Frente de Pareto instancia E22-K4

INSTANCIA E23-K3

Minimizar costo con hmin=0

Fo costo: 431.20

Fo hmax: 149.787

Numero de rutas: 4

Longitud máxima: 34.4114

Longitud mínima: 34.4114

Hmin de 50

Tabla 4.17: Resultados frente de Pareto instancia E23-K3

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA	TIEMPO (sg)
435,84	144,398	4	144.398	50.5884	1
436,56	136,469	5	136.469	50.5884	2
450,11	113,413	5	113.413	73.4545	5
462,00	104,385	6	104.385	50.5884	7
481,86	103,822	6	103.822	50.5884	12
488,99	100,397	6	100.397	50.5884	7
496,70	96,2248	7	96.2248	50.5884	8
510,26	84,2028	7	84.2028	58.5433	10
528,10	82,9859	8	82.9859	50.5884	6
531,48	80,7289	8	80.7289	51.8795	7
820,64	80,7217	11	80.7217	56.3296	5

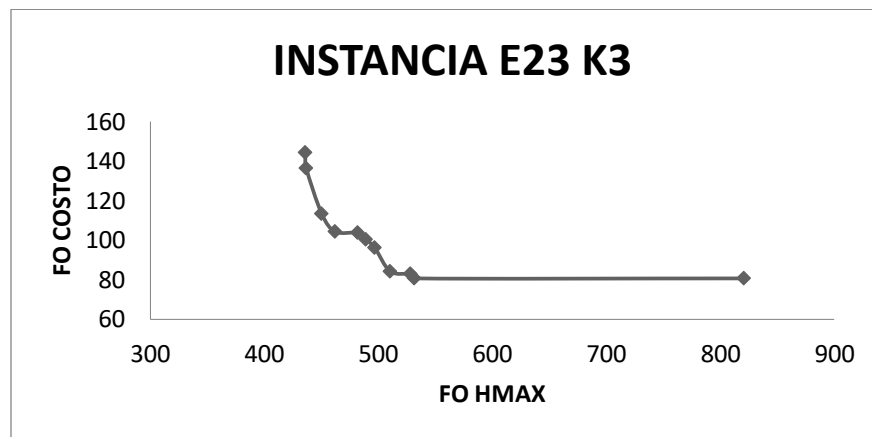


Figura 4.17: Frente de Pareto instancia E23-K3

INSTANCIA E30-K3

Minimizar costo con hmin=0

Fo costo: 336.79

Fo hmax: 130.148

Numero de rutas: 4

Longitud máxima: 130.148

Longitud mínima: 23.1948

Hmin de 27

Tabla 4.18: Resultados frente de Pareto instancia E30-K3

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA	TIEMPO (sg)
343,42	130,148	4	130.148	30.3674	1
344,45	128,514	4	128.514	30.3674	3
349,09	122,148	4	122.148	30.3674	8
349,47	114,533	4	114.533	30.3674	10
369,60	112,898	4	112.898	51.5885	264
374,07	100,496	5	100.496	30.3674	81
384,76	98,065	5	98.065	65.9712	118
384,77	96,4679	5	96.4679	96.4679	152
389,94	91,3602	5	91.3602	65.9712	128
394,10	89,3164	5	89.3164	70.7144	115
435,29	79,1684	6	79.1684	64.3364	66
547,02	69,8939	9	69.8939	58.9852	41
597,39	68,7677	10	68.7677	30.4935	42
1254,67	68,7677	24	68.7677	33.3766	1

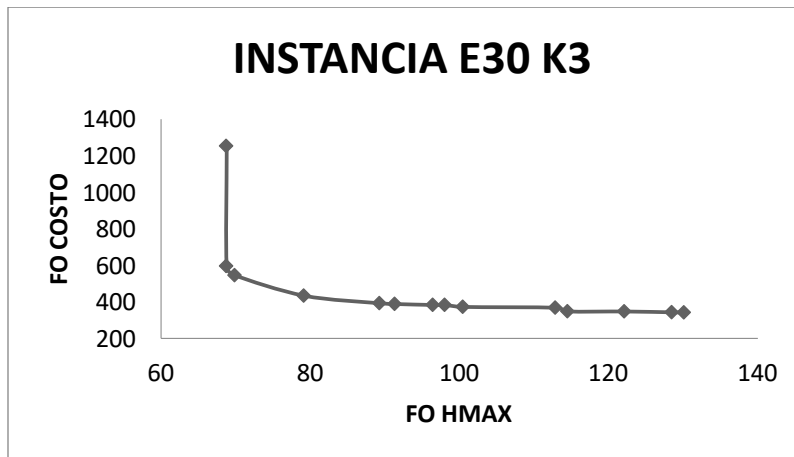


Figura 4.18: Frente de Pareto instancia E30-K3

INSTANCIA E33-K4

Minimizar costo con hmin=0

Fo costo: 511.26

Fo hmax: 152.52

Numero de rutas: 4

Longitud máxima: 152.52

Longitud mínima: 105.0868

Hmin de 106

Tabla 4.19: Resultados frente de Pareto instancia E33-K4

FO COSTO	FO HMAX	NUMERO DE RUTAS	LONGITUD MAXIMA	LONGITUD MINIMA	TIEMPO (sg)
528,75	144,912	4	144.912	122.0222	1485
533,39	142,35	4	142,35	128.2725	6342
541,33	139,174	4	139.174	128.0222	121586
1097,08	123,294	9	123.294	120.4175	152888 (2,67%)

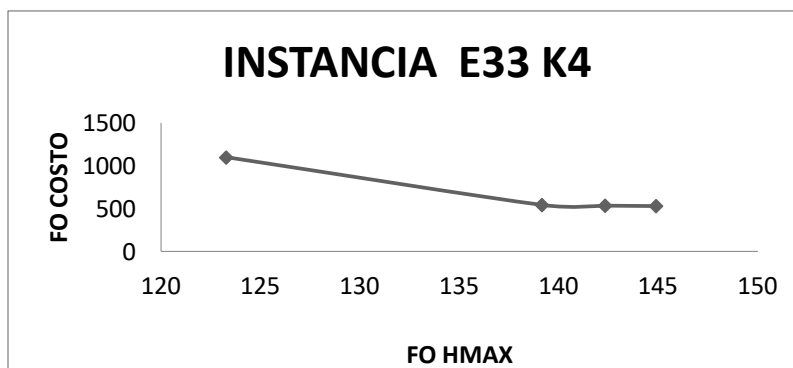


Figura 4.19: Frente de Pareto instancia E33-K4

Los resultados muestran un buen desempeño del modelo matemático que ha sido propuesto. En muchos casos el valor de GAP está entre 0% y 1%; es de notar que este valor se encuentra entre paréntesis en la columna de tiempo y cuando no se especifica su valor es de cero. La instancia P60-k10 presenta el mayor GAP el cual es de 4,5% el cual está presente en la última corrida del modelo o en el extremo inferior, los tiempos computacionales son aceptables en cuanto a la calidad del GAP y al tamaño del problema para un modelo exacto además del tipo del computador en el que se realizaron las pruebas.

Las figuras 4.22 y 4.23, presentan como ejemplo, de soluciones óptimas obtenidas para el modelo P45-k5.

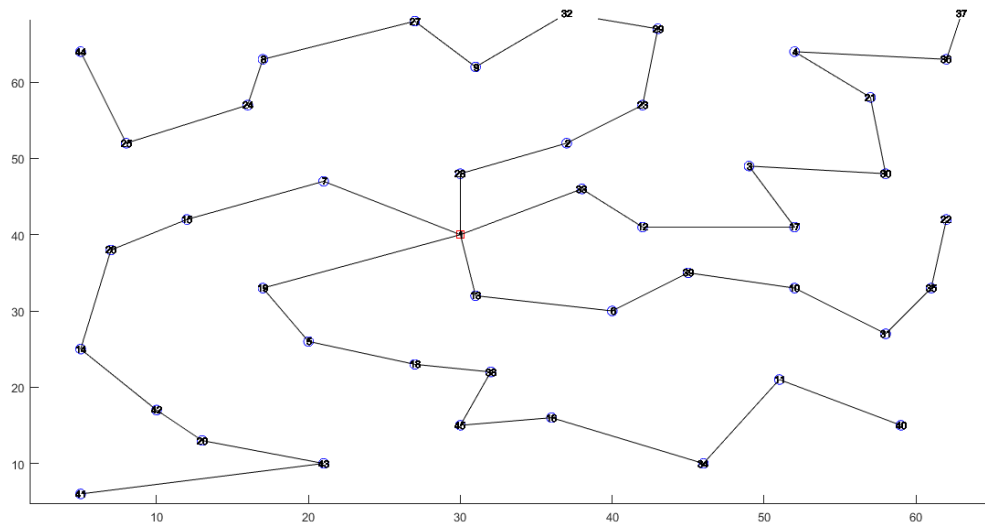


Figura 4.20 : Grafo instancia P-n45-k5, minimizando costo.

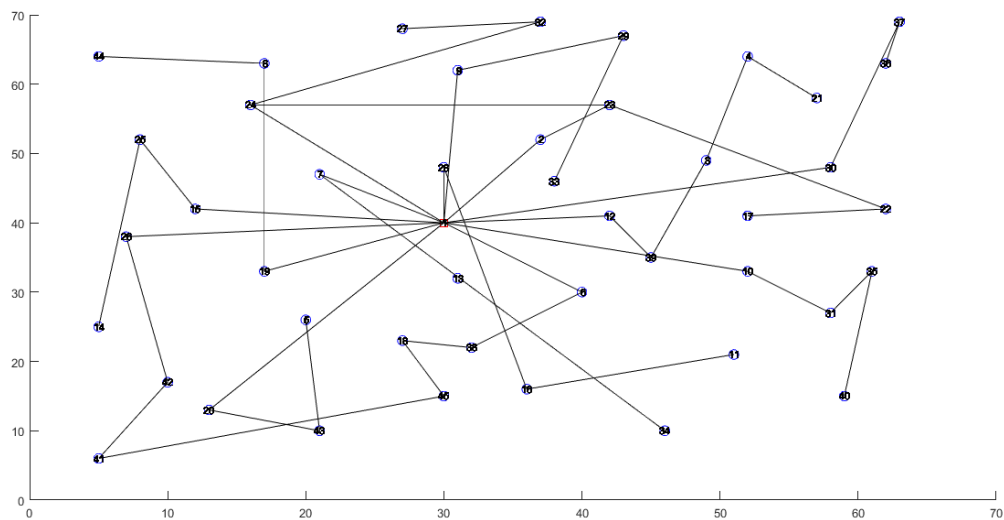


Figura 4.21: Grafo instancia P-n45-k5, minimizando hmax

En todos los casos analizados se observa la conformación de un frente de Pareto, en el cual las soluciones presentan diferentes características relacionadas con el compromiso que se requiera entre costos y longitud de ruta. A manera de ejemplo, en la *ilustración 25* se presentan los puntos del frente de Pareto para el modelo E22-k4 la cual cumple la condición Pareto-óptima porque en los puntos de la gráfica existe siempre solución que mejore en un objetivo pero desmejore el otro al mismo tiempo, se observa que para el punto A la solución es proporcional al mínimo costo sin embargo, la diferencia entre la ruta mínima y la máxima es muy grande aproximadamente del 22 %. Esto implica que los vehículos tienen una distribución de carga poco homogénea por lo que existen rutas muy largas y otras muy cortas. El último punto del frente, muestra la minimización de la función de longitud de ruta máxima. Se observa que la solución se conforma por un mayor número de rutas y por tanto se aumenta el costo en un 41% sin embargo la diferencia entre la ruta más larga y la más corta es del 4% lo que permite un mayor equilibrio de carga y mejor distribución del trabajo. Así, las rutas que conectan los clientes con los depósitos también son de menor longitud promedio, lo cual implica menores recorridos de los vehículos y por lo tanto, una entrega rápida de la carga. Es intuitivo considerar que se va a aumentar el costo si se usan más vehículos. El punto intermedio D es un valor intermedio en el costo y longitud promedio de las rutas. Similarmente a los casos anteriores, se observa como el número de rutas afecta directamente el costo total.

Se ha observado en los experimentos que cuando se utiliza la función objetivo de minimización de costos y la función objetivo de minimización de longitud de ruta máxima es usada como restricción, el modelo se resuelve mucho más rápido que cuando se realiza a la inversa, lo que permite la solución de los casos más grandes. Generalmente cuando se minimiza la longitud de ruta, el número de rutas es mayor y por lo tanto la complejidad matemática del problema es mayor, esto se refleja en el tiempo computacional necesario para su solución.

5.1 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

5.1.1 CONCLUSIONES

Se presento un modelo matemático OVRP multi-objetivo que busca minimizar los costos y la longitud de ruta máxima, que como se mostro en el capítulo 4 presenta un buen desempeño de acuerdo a sus valores de GAP y a la comparación con la literatura existente.

El OVRP se crea para una empresa que no es dueña de una flota de vehículos en absoluto, o su flota de vehículos es inapropiada o insuficiente para satisfacer la demanda de sus clientes. Por lo tanto, la empresa tiene que contratar la totalidad o parte de su entrega de las mercancías o recogida de transportistas externos. Los vehículos de alquiler, no son obligados a regresar a la estación y el costo para la empresa puede depender de la distancia recorrida mientras se carga, es decir, la longitud de las rutas abiertas En este trabajo se realizo una revisión del estado del arte, modelos y técnicas de solución usadas por diferentes autores para el OVRP que permitió obtener información rápida y precisa para futuras investigaciones, además de resolver un modelo con funciones objetivo de minimización de costos, minimización de emisiones y minimización de ruta más larga.

Se dio una visión más amplia y detallada de los avances existentes hasta el momento sobre el modelo especial de transporte en el que las rutas no deben volver al lugar de inicio o deposito, además de una formulación matemática que fue resuelta mediante técnicas exacta que permite comparar la eficiencia y comportamiento de los modelos presentes en la literatura y futuros modelos propuestos o técnicas de solución. Se resolvieron problemas de pequeña escala con el

fin de convertirse en un referente para diferentes autores y una manera de validar metodologías de solución desarrolladas. En el Capítulo 3 se realizó una descripción detallada de los modelos trabajados, mostrando de forma detallada la construcción y significado de las restricciones, con el fin de servir como referente de estudio para futuros trabajos.

Para el problema resuelto de OVRP se consideró un único depósito con capacidad infinita o suficiente para atender la demanda del problema. Todos los vehículos con una capacidad de carga limitada y uniforme. Cada cliente con demanda conocida y visitado una única vez.

Inicialmente se consideró una segunda función objetivo de minimización de emisiones donde se considera una tasa de consumo de combustible que está fuertemente relacionada con el peso neto del vehículo, obtenido como la sumatoria entre el peso del vehículo vacío y el peso de la carga del vehículo; esta la cual se prueba al compararla con Xiao, Zhao, Kaku, & Xu, prueba que dio exitosa y arrojó que el modelo estaba bien desarrollado y evidenciando que la función objetivo es sensible al aumento de la tasa del consumo de combustible. Sin embargo a la hora de construir los frentes de Pareto las soluciones del modelo multiobjetivo no constituyeron un frente de Pareto debido a que no se cumple la condición Pareto-óptima porque en algunos puntos de la gráfica existe otra solución tal que mejore en un objetivo y mejora el otro al mismo tiempo.

La segunda función objetivo seleccionada buscaba minimizar la longitud de ruta máxima o *vehicle routing problems with load balancing* o VRPRB la cual fue adaptada de Alvina G.H. Kek, Ruey Long Cheu, Qiang Meng, Los resultados muestran un buen desempeño del modelo matemático propuesto obteniendo valores de GAP inferiores a 4,5% y de cero en la mayoría de los casos.

El enfoque multi-objetivo para este problema es totalmente apropiado, ya que el equilibrio entre los aspectos económicos y los aspectos de longitud de ruta se puede seleccionar desde el frente de Pareto utilizando un proceso de toma de decisiones.

Una de las conclusiones más interesantes de este estudio, es que el costo es afectado directamente por la cantidad de rutas y a mayor cantidad de rutas más equilibradas es la carga. Al usar más rutas, se presenta una mayor cercanía cliente-carga. Además, el uso de más vehículos implica una mejor distribución de la carga por vehículo. Por lo tanto, al minimizar la longitud de ruta

más larga , se podrán tener recorridos cortos, vehículos transitando con cargas moderadas y menores tiempo de entrega. Desde el punto de vista del impacto ambiental, más vehículos realizan rutas más cortas e intentan servir tan pronto como sea posible a aquellos clientes con mayor demanda, esta parece ser la estrategia elegida.

5.1.2 TRABAJOS FUTUROS

En el caso del problema de ruteo abierto aparece un elemento de gran relevancia el cual puede ser los tiempos de entrega o ventanas de tiempo. Esta condición es adecuada desde la óptica del servicio al cliente, donde se trata de mercancías que este deba recibir o realizar pagos contra entrega y solo disponga de un horario para su recepción. Además sería interesante considerar un problema de planeación de rutas vehiculares con flota heterogénea.

El modelo propuesto puede enriquecerse dándole pesos a las funciones objetivo y así trabajar ambas en una sola función y poder encontrar la mezcla adecuada. Además es posible plantear mas de dos funciones objetivo, en este caso tres por ejemplo poder aplicar la técnica *Epsilon Constraint* y realizar las graficas en los tres ejes coordenados.

Con el propósito de hacer mas aplicable la técnica usada en esta trabajo seria interesante resolver problemas de mayor escala mediante la división de estos en problemas mas pequeños, permitiendo asi obtener soluciones optimas para cada subgrupo y una aproximación para el problema general.

Por último al poder usarse este trabajo como referencia para comparación de resultados seria importante construir una meta heurística que resuelva el problema multiobjetivo planteado para dar solución a instancias de mayor tamaño.

BIBLIOGRAFÍA

- Augerat, & Eilion, C. a. (<http://vrp.atd-lab.inf.puc-rio.br/index.php/en/>).
- Barbarosoglu, G., & Ozgur, D. (1999). A tabu search algorithm for the vehicle routing problem. *Computers and Operations Research*, 255–270.
- Bodin, L., Golden, B., Assad, A., & M. Ball. (1983). Routing and scheduling of vehicles and. 63–211.
- Brandao, J. (2004). A tabu search algorithm for the open vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 552-564.
- Brandao, J. (2004). A tabu search heuristic algorithm for open vehicle routing problem. 552–564.
- Brito, F., Martínez, J., Moreno, J., & Verdegay. (2015). An ACO hybrid metaheuristic. *Applied Soft Computing*.
- Derigs, U., & Reuter, K. (2009). A simple and efficient tabu search heuristic for solving the open vehicle routing problem. 1658–1669.
- Eliana M. Toro, J. F. (2017). A multi-objective model for the green capacitated location-routing problem considering environmental impact. *Computers & Industrial Engineering*, 114-125.
- Fleszar, K., Osman, I., & Hindi, K. (2009). A variable neighbourhood search algorithm for the open vehicle routing problem. 803–809.
- Fu, Z., Eglese, R., & L. Li. (2005). A new tabu search heuristic for the open vehicle routing. 267–274.
- Fu, Z., Eglese, R., & Li, L. (2006). Corrigendum to the paper: A new tabu search heuristic. 1017–1018.
- Ge, H., Zhen, T., Jiang, Y., & Che, Y. (2010). An intelligent solution for open vehicle routing problem in grain logistics. *Advances in Wireless Networks and Information Systems*, 389–396.
- Geraldine, B. S. (2019). *Solucion del problema de ruteo de vehiculos multiobjetivo considerando balanceo de rutas y efectos contaminantes*.

- Granada-Echeverri, M. T. (2019). A mixed integer linear programming formulation for the vehicle routing problem with backhauls. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 295-308.
- H, E. (s.f.).
- H, E., & Frazelle. (2001). Supply Chain Strategy: The Logistics of Supply Chain. *McGraw-Hill Professional*.
- Hassani, S. M., & Abolghasemi, N. (2011). A particles warm optimization algorithm for open vehicle routing problem. 11547–11551.
- Huang, F., & Liu, C. (2010). An improved tabu search for open vehicle routing problem. *Proceeding 2010 International Conference on Management and Service*, 1–4.
- L, L. (2005). Private communication. *Route Smart Technologies*.
- L., S. (1981). Formulation and structure of more complex/realistic routing and. *Networks*, :229–32.
- Laporte, G., Gendreau, M., Potvin, J.-Y., & Semet, F. (2000). Classical and modern heuristics for the vehicle routing problem. *International Transactions in Operational Research*, 285–300.
- Lau, H., Sim, M., & Teo, K. (2003). Vehicle routing problem with time windows and a limited number of vehicles. *European Journal of Operational Research*, 559–569.
- Lepesqueur, A. S. (2014). *Estudio del problema de ruteo de vehículos con balance de carga: Aplicación de la meta-heurística Búsqueda Tabú*. Trabajo de grado presentado como requisito parcial para obtener el título de Magister en gerencia de operaciones, universidad de la sabana.
- Letchford, A. N., Lysgaard, J., & Eglese, R. W. (2006). A branch-and-cut algorithm for the capacitated open vehicle routing problem. *CORAL Working Papers*.
- Letchford, A., & Eglese, L. y. (2007). *A branch-and-cut algorithm for the capacitated open vehicle routing problem*.
- Li, F., Golden, B., & Wasil, E. (2007). The open vehicle routing problem: Algorithms, large-scale test problems, and computational results. 2918–2930.
- Li, X., & Tian, P. (2006). An ant colony system for the open vehicle routing problem. *Lecture Notes in Computer Science*, 356–363.
- Li, X., Tian, P., & Leung, S. (2009). An ant colony optimization metaheuristic hybridized. 1012–1025.
- Matl, P., Hartl, R. F., & Vidal, a. T. (2017). Workload Equity in Vehicle Routing Problems:A Survey and Analysis. *TRANSPORTATION SCIENCE*, 1-22.
- Montemanni, R., Gambardella, L., Rizzoli, A., & Donati, A. (2005). Ant colony system for a dynamic vehicle routing problem. *Journal of Combinatorial Optimization*, 327– 343.
- Ocampo, E. (2016). *Solución del problema de localización y ruteo usando un modelo matematico flexibley considerando efectos ambientales*. Pereira: Doctoral dissertation, Universidad Tecnologica de Pereira. Facultad de Ingenieria Electrica, Electronica, Fisica y Cienciasde la Computacion, Facultad de Ingenieria Mecanica y Facultad de Ingenieria Industrial. Doctorado en ingenieria.

- Pan, L., & Fu, Z. (2009). A clonal selection algorithm for open vehicle routing problem. *Third International Conference on Genetic and Evolutionary*, 786–790.
- Pisinger, D., & Ropke, S. (2007). A general heuristic for vehicle routing problems. 2403–2435.
- Ralphs, T. (2003). Parallel branch and cut for capacitated vehicle routing. *Parallel Computing*, 607–629.
- Ramon, G., Eliana, T., & Antonio, E. (2015). *Técnicas Heurísticas y metaheurísticas*. Pereira: UTP.
- Repoussis, P., Paraskevopoulos, D., Zobelas, G., Tarantilis, C., & Ioannou, G. (2009). A web- based decision support system for waste lube oils collection and recycling. *Eur J Oper*, 676–700.
- Repoussis, P., Tarantilis, C., & G, I. (2007). The open vehicle routing problem with time windows. 355–67.
- Repoussis, P., Tarantilis, C., & Ioannou, G. (2007). The open vehicle routing problem. 355–367.
- Repoussis, P., Tarantilis, C., Braysy, O., & Ioannou, G. (2010). A hybrid evolution strategy for the open vehicle routing problem. 443-455.
- Russell, R., Chiang, W., & Zepeda, D. (2008). Integrating multi-product production and distribution in news paper logistics. 1576–1588.
- Russell, R., Chiang, W.-C., & Zepeda, D. (2008). Integrating multi-product production and distribution in newspaper logistics. *Eur J Oper*, 1576–88.
- Salari, M., Toth, P., & Tramontani, A. (2010). An ILP improvement procedure for the open vehicle routing problem. 2106–2120.
- Syslo, M., Deo, N., & Kowalik, J. (s.f.). Discrete Optimization Algorithms with Pascal . *Programs, Prentice Hall*, 1983.
- Tan, K., Chew, Y., & Lee, L. (2006). A hybrid multi-objective evolutionary algorithm for solving truck and trailer vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*, 855–885.
- Tan, K., Chew, Y., & Lee, L. (2006). A hybrid multi-objective evolutionary algorithm for solving truck and trailer vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*, 855–885.
- Tarantilis, C., Diakoulaki, D., & Kiranoudis, C. (2004). Combination of geographical information system and effective routing algorithms for real life distribution operations. 437–53.
- Tarantilis, C., Ioannou, G., & Prastacos, G. (2005). Advanced vehicle routing algorithms for complex operations management problems. *Journal of Food Engineering*, 455–471.
- Tarantilis, C., Ioannou, G., Kiranoudis, C., & Prastacos, G. (2004). A thre shold accepting approach to the open vehicle routing problem. 345–360.
- Tarantilis, C., Kiranoudis, C., Ioannou, G., & Prastacos, G. (2005). Solving the open vehicle routing problem via a single parameter metaheuristic algorithm. 588–96.
- Tarantilis, G., Ioannou, C., & Kiranoudis, G. (2005). Solving the open vehicle routing problem via a single parameter metaheuristic algorithm. 588–596.

- Tavakkoli, R., Safaei, N., & Gholipour, Y. (2006). A hybrid simulated annealing for capacitated vehicle routing problems with the independent route length. *Applied Mathematics and Computation*, 445–454.
- Toro, E. M., J, F. F., & F., G. E. (2017). A multi-objective model for the green capacitated location-routing problem considering environmental impact. *Computers & Industrial Engineering*, 110, 114-125.
- Toth, P. (2000). Optimization engineering techniques for the exact solution of np-hard combinatorial optimization problems. *European Journal of Operational Research*, 222– 238.
- UMITRI. (2014). *Large drop in fuel economy in september. Transportation*. University of Michigan: <http://www.umtri.umich.edu/what-were-doing/news/large-drop-fuel-economy-september>.
- Wang, W., Wu, B., Zhao, Y., & Feng, D. (2006). Particles warm optimization for open vehicle routing problem. 999–1007.
- Yu, S., Ding, C., & Zhu, K. (2011). A hybrid GA-TS algorithm for open routing optimization of coal mines material. 10568–10573.
- Zachariadis, E., & Kiranoudis, T. (2010). open vehicle routing problem metaheuristic fore xamining wide solution neighborhoods. 712–723.
- Zhen, T., Zhu, Y., & Zhang, Q. (2009). A particles warm optimization algorithm for the open. *International Conference on Environmental Science and Information Application Technology*, 560–563.